זרימה בגרפים מישוריים.

Note Title

$G=(V,A)$ גרף מישורי.

זרימה γ ב-G היא השמה של ערכים לחיצים של G

כך ש: $\gamma(d) = -\gamma(rev(d))$

כלומר γ הוא וקטור במרחב הקשתות של G.

פונקצית **קיבולת** ב-G היא השמה $c: D \to \mathbb{R}$

כלומר, וקטור במרחב החיצים.

אנו רגילים בדרך לעבוד עם קיבולת $c(a)$ לא שליליות של

הקשתות של גרף מכוון. ההרחבה לחיצים הוא:

$$c(a^+) = c(a)$$

$$c(a^-) = 0$$

זרימה γ **מכבדת את הקיבולת** c אם

$$\gamma(d) \le c(d) \quad \forall d \in D$$

כלומר $c(d)$ הוא חסם עליון לזרימה.

מה המשמעות של קיבולת שלילית:

$$\gamma(d) \leq c(d)$$

$$\iff \quad -\gamma(d) \geq -c(d)$$

$$\iff \quad \gamma(rev(d)) \geq -c(d)$$

כלומר, אם $c(d) \leq 0$ אז $|c(d)|$ הוא

חסם תחתון על הזרימה של $rev(d)$.

שימושי כשעוסקים בזרמים שיוריים.

זרימה γ נקראת **משמרת** בקדקד v אם

$$\sum_{d \in v} \gamma(d) = 0 \qquad \left[\, \gamma \cdot \eta(v) = 0 \,\right]$$

זרימה שמשמרת בכל קדקד נקראת **סירקולציה**.

כלומר, סירקולציה היא וקטור במרחב המעגלים.

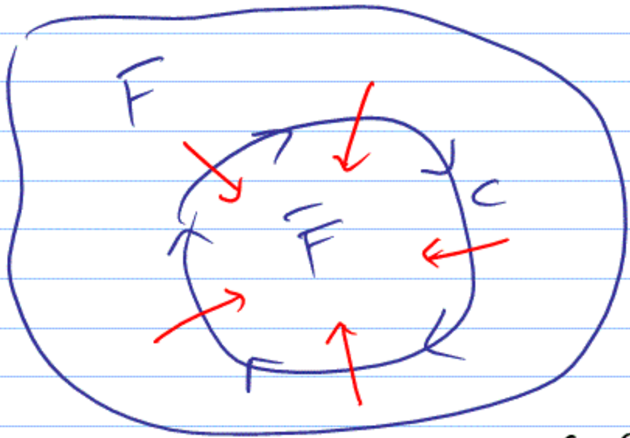
הייתי יכול לגזור את כל התכונות של סירקולציות

באופן מיידי מתכונות של מרחב המעגלים והדואליות שלו

עם מרחב החתכים של G^*. ראו בספר.

אפשר גם בלי הפורמליזם של מרחבים וקטוריים.

כל סירקולציה ניתן לפרק לקבוצה של מעגלים פשוטים של זרימה. חשבו על מעגל C שכל אחד מהחיצים שלו נושא זרימה λ.



החיצים של C מהווים חתך פשוט $(F,\bar{F})$ ב-G^* כך ש $\vec{\delta}_{G^*}(F)=C$

תהי φ פונקציה על הפאות של G:

$$\varphi(g)=\begin{cases} 0 & g\in F \\ \lambda & g\in \bar{F} \end{cases}$$

פונקציה פוטנציאל

נגדיר זרימה:

$$\theta_\varphi(d) = \varphi(\text{head}_{G^*}(d)) - \varphi(\text{tail}_{G^*}(d))$$

$$= \varphi(\text{פאה לימין } d) - \varphi(\text{פאה משמאל } d)$$

θ_φ היא בדיוק הסירקולציה שהתחלנו איתה.

מכיוון שכל סירקולציה ניתן לפרק למעגלים פשוטים של צביעה, לכל סירקולציה מתאימה פונקצית פוטנציאל.
פונקצית הפוטנציאל יחידה תחת הקונבנציה ש $\varphi(f_\infty)=0$.

ההיפך גם נכון: לכל פונקצית מחיר מתאימה סירקולציה.

ההתאמה הזו בין סירקולציות ב-G לפונק' פוטנציאל על הפאות של G אינה מקרית.

אמרנו שסירקולציה θ היא וקטור במרחב המעגלים, כלומר ניתן לפתח את θ בבסיס של מרחב החתכים של G^*:

$$\theta = \sum_{f \notin f_\infty} \varphi(f) \cdot \eta(f)$$

ש-φ הפוטנציאל הינו
המקדמים של הפונקציה בפיתוח
של θ בבסיס $\{\eta(f)\}$.
$\varphi(f_\infty)=0$ כי הבסיס אינו כולל את $\eta(f_\infty)$

$$\theta[d] = \sum_{f \notin f_\infty} \varphi(f) \cdot \eta(f)[d] = \varphi(\mathrm{head}_{G^*}(d)) - \varphi(\mathrm{tail}_{G^*}(d))$$

עבור זרימה f בגרף עם קיבולת c, הקיבולת השיורית היא:

$$c_f(d) = c(d) - f(d)$$

הגרף השיורי G_f הוא G עם קיבולות c_f

עבור סירקולציה θ, שהפוטנציאל שלה הוא φ, הקיבולת השיורית היא:

$$\begin{aligned}
c_\theta(d) &= c(d) - \theta(d) \\
&= c(d^*) - (\varphi(head(d^*)) - \varphi(tail(d^*))) \\
&= c(d^*) + \varphi(tail(d^*)) - \varphi(head(d^*)) \\
&= c_\varphi(d^*)
\end{aligned}$$

כלומר, הקיבולת השיורית של d ביחס לסירקולציה θ היא העלות של d ביחס לפונק' המחיר φ.

אם φ משרה עלויות אי-שליליות אז

$$0 \leq c_\varphi(d^*) = c_\theta(d) = c(d) - \theta(d)$$

כלומר $\theta(d) \leq c(d)$ או במילים: θ מכבדת את הקיבולת c אם ורק אם φ משרה עלויות אי-שליליות.

קיבלנו קשר בין סירקולציות ב-G ואורכים ב-G^*:

<u>משפט</u>: קיימת סירקולציה שמכבדת את הקיבולות C
אם ורק אם אין מעגלים באורך שלילי ב G^*
(האורך של חץ f ב-G^* הוא הקיבולת שלו $C[d]$ ב-G).

<u>הוכחה</u>: $\Leftarrow$ תהי Θ סירקולציה שמכבדת את C.
תהי φ פונקציית הפוטנציאל שמתאימה ל-θ. העלות C_φ
אי שלילית. לכן אורכו של כל מעגל ביחס ל C_φ אי-שלילי,
אבל אורכו של כל מעגל ביחס ל C_φ זהה לאורכו ביחס ל-C.
$\Rightarrow$ אם אין מעגלים שליליים אז תהי φ מרחקים קצרים
ב-G^*. אזי $C_\varphi \geq 0$, כלומר Θ_φ מכבדת את הקיבולות C $\square$

זו בעצם הבעיה הראשונה שטיפלנו בה -
מצא סירקולציה שמכבדת קיבולות נתונה C.
כיצד: חשב מרחקים קצרים φ ב-G^* מקודקד
כלשהו (פאה של G). הסירקולציה Θ_φ
מכבדת את הקיבולות.

זרימת s-t

בהינתן מקור s ובור t, זרימת s-t היא זרימה ש:

(1) מכבדת קיבולות

(2) משמרת בכל קדקד פרט ל-s, t.

בעיית הזרימה המקסימלית היא למצוא זרימת s-t f בעלת ערך $|f| = \sum_{d\in t} f[d]$ מקסימלי.

אבחנה: אם f, f' שתי זרימות s-t עם אותו ערך אז $f'-f$ היא סירקולציה.

נניח שידוע שערך הזרימה המקסימלית הוא r. איך מוצאים הזרימה?

תהי f זרימת s-t כלשהי שערכה r, לאו דווקא כזו שמכבדת קיבולות. (למשל, מזרימה r על פני מסלול כלשהו בין s ל-t).

אם f אינה מכבדת קיבולת, אז בגרף השיורי G_f

יהיו חיצים עם קיבולת שלילית.

נמצא סירקולציה θ שמכבדת את הקיבולת C_f ע"י חישוב

מסלולים קצרים ב G_f^*.

$$\theta[d] \le C_f[d] = C[d] - f[d]$$

$$\Rightarrow \quad \theta[d] + f[d] \le C[d]$$

כלומר $\theta + f$ הוא זרימה s-t בעלת ערך

λ שמכבדת את הקיבולת C.

ואם לא יודעים את λ?

חיפוש בינארי (ל-λ גדול מדי נמצא מעגל שלילי ב G_f^*)

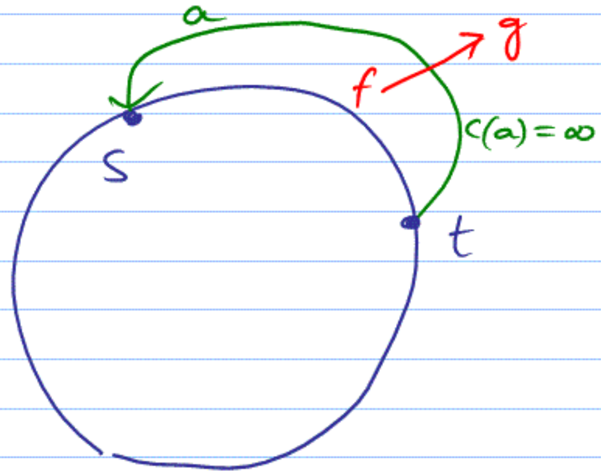
זמן ריצה: $O(n \log^2 n \cdot \log C)$

סכום הקיבולות בגרף.

זהו זמן ריצה פולינומיאלי חלש (תלוי בקלט עצמו, ולא

רק בגודל הקלט).

זרימה s-t מקסימלית כאשר s, t על אותו פאה



1) הוסף קשת a מ-t ל-s.
הקיבולת של a $c(a)=\infty$.

2) חשב φ: מרחקים קצרים מ- $tail_{G^*}(a)$ ב- G^*

3) החזר את f: הצמצום של θ_φ לקשתות המקוריות של G.

θ_φ היא סירקולציה ב $G\cup\{a\}$. לכן f היא זרימה s-t ב- G.

נותר להראות מקסימליות.

נסמן: $f = tail_{G^*}(a)$; $g = head_{G^*}(a)$

מכיוון ש $c(a)=\infty$, מספיק להראות ש-θ_φ

ממקסמת את הזרימה על a מבין כל הסירקולציות

שמכבדות את הקיבולות c.

מכיוון ש $\theta_\varphi(a) = \varphi(g) - \varphi(f)$,

מספיק להראות שלכל פוטנציאל מחיר φ' המקיימת

$c_{\varphi'} \geq 0$ ($\theta_{\varphi'}$ מכבדת הקיבולות c)

מתקיים:

$$\varphi(g) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(f)}} \geq \varphi'(g) - \varphi'(f)$$

<u>הוכחה:</u>

יהי P המסלול ל-g ב-G_f המרחקים הקצרים.

$P = \underset{f}{\underset{\shortparallel}{v_0}}, v_1, \dots, \underset{g}{\underset{\shortparallel}{v_k}}$. לכל $v_{i-1}v_i$ מתקיים

$$0 \leq c_{\varphi'}(v_{i-1}v_i) = c(v_{i-1}v_i) + \varphi'(v_{i-1}) - \varphi'(v_i)$$

כלומר

$$\varphi'(v_i) \leq c(v_{i-1}v_i) + \varphi'(v_{i-1})$$

לכן:

$$\varphi'(g)=\varphi'(v_k)\le c(v_k v_{k-1})+\varphi'(v_{k-1})\le \dots$$
$$\le \sum_{i=1}^{k} c(v_i v_{i-1}) + \varphi'(v_0)$$

כלומר

$$\varphi'(g)-\varphi'(f)\le \sum_{d\in P} c(d)=\varphi(g)$$

$\square$

שימו לב שההוכחה עובדת לכל f שבחרנו ב- G^*

הוא השורש f של עץ המרחקים הקצרים שמייצגת φ.

כלומר θ_φ היא הסירקולציה שמשמשת

(סימולטנית) את הזרימה על כל החיצים הללו.

חיצים אלו הם ה rev של החיצים של הפאה f.