Branch Decomposition & Baker's technique

אני עובדים לדבר על קירובים לבעיות NP קשות.

היום נלמד טכניקה כללית לאלגוריתמי קירוב בגרפים מישוריים שמבוססת

על פירוק הגרף המקורי לתתי-גרפים שעליהם "קל" לפתור את הבעיה,
ומהפתרונות האופטימליים לתתי-הגרפים נוכל להרכיב פתרון מקורב לבעיה
המקורית.

נעבוד עם Vertex Cover כדוגמה לאורך ההרצאה, הטכניקה עובדת
לבעיות רבות אחרות (independent set, dominating set, ...)
ויכולה לעבוד גם בבעיות ממושקלות.

נתחיל בבעיה קלה: VC של עץ.

ניתן לפתור באמצעות תכנות דינאמי:

עבור כל קדקד v של העץ T מחשבים לאורך המסלול נשמור שני גדלים:

X_v - גודל הפתרון האופטימלי בתת העץ של v

Y_v - גודל הפתרון האופטימלי בתת העץ של v, כש-v חייב להיות בפתרון.

עבור עלה v, $x_v = 0$, $y_v = 1$

עבור קדקד פנימי v עם ילדים $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$y_v = 1 + \sum_i x_{v_i}$$

$$x_v = \min \{ y_v, \sum_i y_{v_i}$$

גודל VC מינימלי לעץ T ששורשו r הוא פשוט x_r.

מה ניתן לעשות כשהגרף אינו עץ?

בפתרון לעצים השתמשנו בפתרון לתת גרפים (תת-עצים) קטנים כדי לקבל פתרון לתת-גרף גדול יותר. הסיבה שקל לעשות זאת היא שהאינטראקציה בין תת עצים מוגבלת מאוד - כל תת עץ מתחבר לשאר העץ באמצעות קשת אחת שמחברת לשורש של תת העץ.

ננסה לפרק גרף שאינו עץ לתתי-גרפים הולכים וגדלים, שהאינטראקציה ביניהם מוגבלת.

ניתן לעבוד עם תת גרפים המושרים על ידי:

קבוצות של קדקודים $\Leftarrow$ carving decomposition

או קבוצות של קשתות $\Leftarrow$ branch decomposition

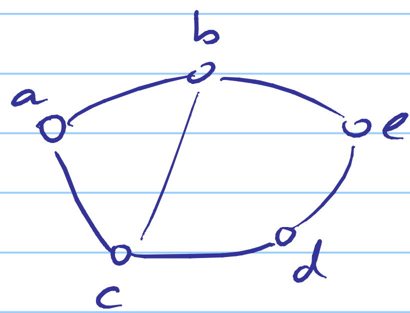
נתחיל עם תתי גרפים מושרי קדקודים - Carving Decomposition

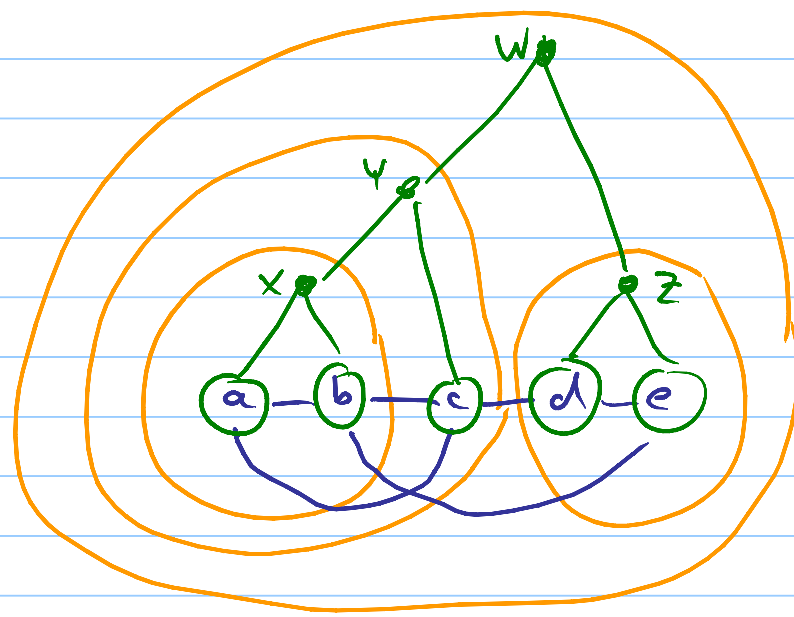
יהי $G=(V,E)$ גרף.

יהי T עץ בינארי. שעליו הם הקדקודים של G

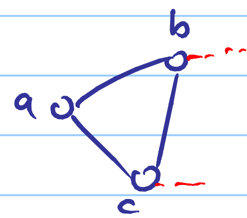
כל צומת $t\in T$ מתאים לתת גרף של G המושרה ע"י העלים

בתת העץ T_t של T המושרש ב-t.





למשל - תת הגרף שמתאים ל-T_Y הוא $G_Y=$



מהי האינטראקציה של G_Y עם שאר הקדקודים בגרף?

הקשתות בחתך $\delta_G(Y)=\delta_G(\{a,b,c\})$.

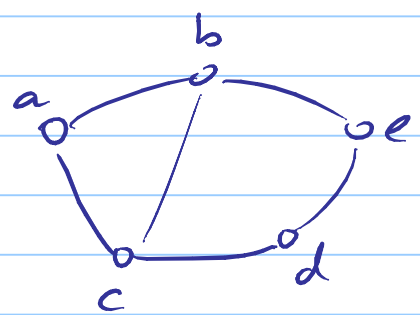
הרוחב של T הוא $\max_{X\in T}|\delta_G(X)|$

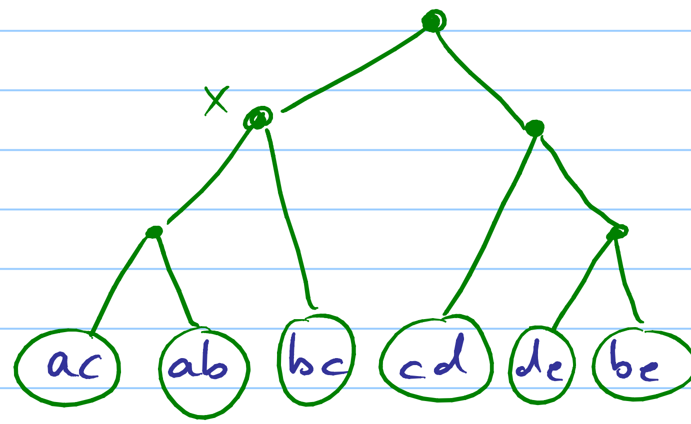
ה-carvingwidth של G הוא הרוחב המינימלי של Carving decomp. של G.

אבחנה: carvingwidth $\geq$ max degree

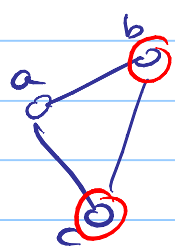
הגדרה - Branch decomposition - חלוקה לתת גרפים מושרי קשתות

ההבדל הוא שהעלים של העץ הבינארי T הם כעת הקשתות של G.





תת הגרף שמוגדר ל- T_x הוא $G_x =$



מה האינטראקציה של G_x עם שאר הקשתות בגרף?

$\partial_G(x)$ - הקדקודים של G_x שעליהם קשת שאינה ב- G_x

הרוחב של T הוא $\max_{x \in T} \partial_G(x)$.

ה- branchwidth של G הוא הרוחב המינימלי של branch decomp. של G.

דוגמה: חישוב VC באמצעות DP על branch-decomposition,

לכל $X \in T$, לכל $S \subseteq \partial_G(X)$,

$M_X[S] =$ גודל VC מינימלי של $G(X)$ שמשתמש ב-S ולא משתמש ב-$\partial_G(X) \setminus S$.

עבור קדקד בודד - טריוויאלי. אם W אבא של X, Y

$$M_W[S] = \min_{S_X, S_Y} M_X[S_X] + M_Y[S_Y] - |S_X \cap S_Y|$$

where: $S_X \subseteq \partial_G(X)$, $S_Y \subseteq \partial_G(Y)$ $\quad (S_X \cup S_Y) \cap \partial_G(W) = S$

מה זמן הריצה?

לכל אב $X \cup Y$ מעבר X, Y לוקח $|\partial_G(X)| \cdot |\partial_G(Y)| = O(2^{bw} \cdot 2^{bw})$

כמה צמתים יש ב-T? $O(n)$

$\Leftarrow$ זמן ריצה $O(4^{bw} \cdot n)$

לינארי אם branchwidth קבוע!

הגדרה מתמטית:

S - קבוצה של אלמנטים (ground set)

משפחה C של תת קבוצות של S נקראת laminar / non-crossing

אם לכל $c_1, c_2 \in C$, $c_1 \cap c_2 = \phi$ או $c_1 \subseteq c_2$ או $c_2 \subseteq c_1$.

Carving של S הוא משפחה non-crossing מקסימלית
(כלומר, לא ניתן להוסיף אף תת-קבוצה נוספת).

Carving $\Longleftrightarrow$ עץ שעליו הם האלמנטים של S.

carving decomp. הוא Carving של V

branch decomp הוא Carving של E

(יש פרמטר נוסף שנקרא treewidth שבמובן מסוים מגדיר עד
כמה G דומה לעץ. $bw-1 \le tw \le \frac{3bw}{2}$
אבל לא נגדיר treewidth בצורה מפורשת)

בגרפים כלליים חישוב branchwidth הוא NP-complete

(אם ידוע ש $bw=k$ אז ניתן למצוא branch decomp. בזמן $2^{O(\mathrm{poly}\,k)} \cdot n$)

בגרפים מישוריים ניתן לחשב bw במדויק (לא treewidth).

- מחיקת קשתות וקדקודים אינה מגדילה   Carving width
- מחיקה או כיווץ של קשתות אינה מגדילה   branchwidth

קיימים גרפים מישוריים (למשל grid) עם $bw=\Theta(\sqrt{n})$

וברור שקיימים גרפים מישוריים עם carvingwidth $\Theta(n)$.

אז איך יש טיעון שהמושגים הללו יעזרו לנו?

נראה שיש קשר בין carving width, branchwidth של G

לרדיוס של G ושל G^*. אח"כ נפרק את G לתת גרפים

עם רדיוס קטן ונוכל לחשב קירובים באופן יעיל.

למה - יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי מדרגה לכל היותר Δ.

יהי T^* עץ פורש של G^* בעומק k. אזי ל-G יש carving width לכל היותר $2k+\Delta-1$.

הוכחה: יהי T עץ פורש של G שמורכב מהקשתות שאינן ב-T^*.
בחר שורש r ל-T. תהי $C(v)$ קבוצת הצאצאים של v ב-T.
$C(r)=V$, כלומר $\delta_G(C(r))=\emptyset$.
עבור קדקד $v\neq r$, $\delta_G(C(v))$ הוא החתך הבסיסי של הקשת e שנכנסת ל-v מההורה של v ביחס ל-T, כלומר דואלי למעגל הבסיסי של e ביחס ל-T^*. לכן $|\delta_G(C(v))| \leq 2k+1$.

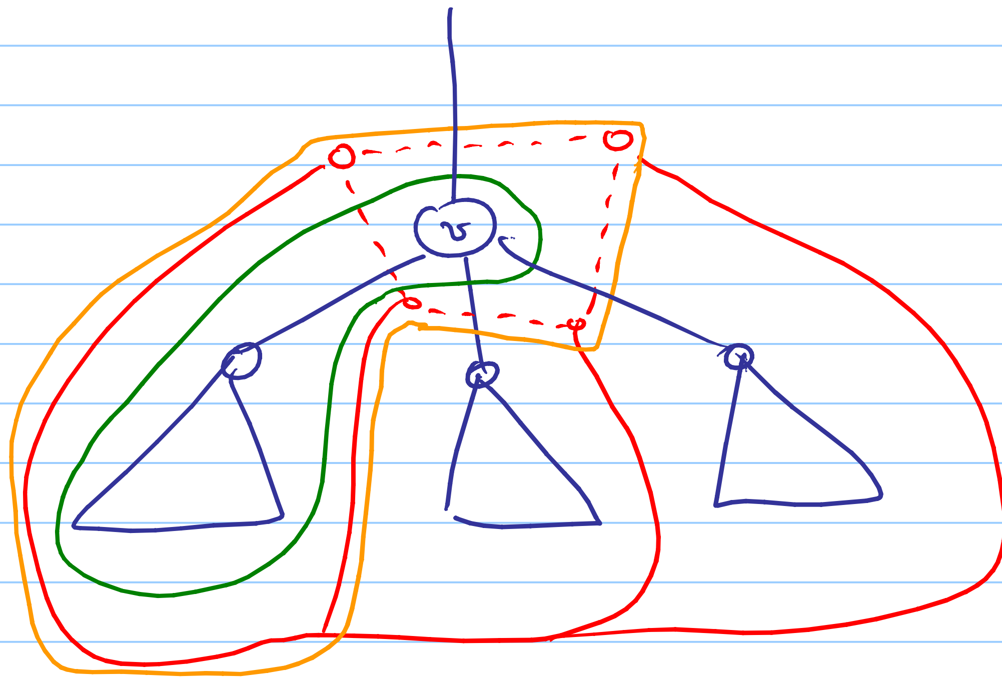
הבעיה היא ש-$\{C(v)\}_{v\in V}$ אינו carving decomp. כי אינו משפחה <u>מקסימלית</u> של תת קבוצות לא ריקות של V. נתקן זאת.

יהיו $v_1,\dots,v_{\Delta-1}$ הילדים של v, ונגדיר

$$C_i(v) = \{v\} \cup \bigcup_{j=1}^{i} C(v_i)$$

קל לראות שהאיחוד של כל ה-$C_i(v)$ (לכל v ולכל i) הוא carving decomp. של G, ולפי הציור בעמוד הבא, רוחבו $2k+\Delta-1$

$\square$



חלק מ-T בכחול   חלק מ-T^* באדום

הקדקודים של $C_1(v)$ מוקפים בירוק

הדואלי של $\delta_G(C_1(v))$ בכתום. יש לכל היותר Δ-1 קשתות כתומות שאינן ב-T

ולכן היותר 2k קשתות כתומות ב-T.

התלות בדרגה מפריעה, ולא קיימת ב branch decomp.

<u>משפט</u> - [Tamaki]

קיים אלגוריתם לינארי שבהינתן גרף מישורי G, מחזיר branch decomp. שרוחבו לכל היותר $3+2\min\{\text{רדיוס של } G,\ \text{רדיוס של } G^*\}$.

ההוכחה מאוחר יותר. ראשית נראה איך משתמשים במשפט

סכימת הקירוב של Baker

בצורה הישירה ביותר עובדת על בעיות בעלות התכונה הבאה

<u>תכונת הצמצום</u>: אם S פתרון לבעיה בגרף G, אז ההגבלה של S לתת גרף H של G היא פתרון לבעיה בגרף H.

תכונת הצמצום תאפשר לנו לחסום את שיעור הקירוב.

דוגמה לבעיות שמקיימות את תכונת הצמצום: Vertex cover, indep. set

דוגמה לבעיות שלא מקיימות את תכונת החלוקה: dominating set, TSP

לכל בעיה נתאים תתי גרפים שמקיימים את התכונה הבאה:

<u>תכונת ההרכבה</u> - אם H_i תתי גרפים (לאו דווקא זרים) של G

ו-S_i פתרון לבעיה על H_i, אז $\cup S_i$ פתרון לבעיה ב-G.

למשל, ל Vertex Cover, כל חלוקה לתתי גרפים כך ש $\bigcup H_i = G$

ל- independent set דרוש שלא יהיו שני תתי גרפים H_i, H_j עם קשר ביניהם ב-G.

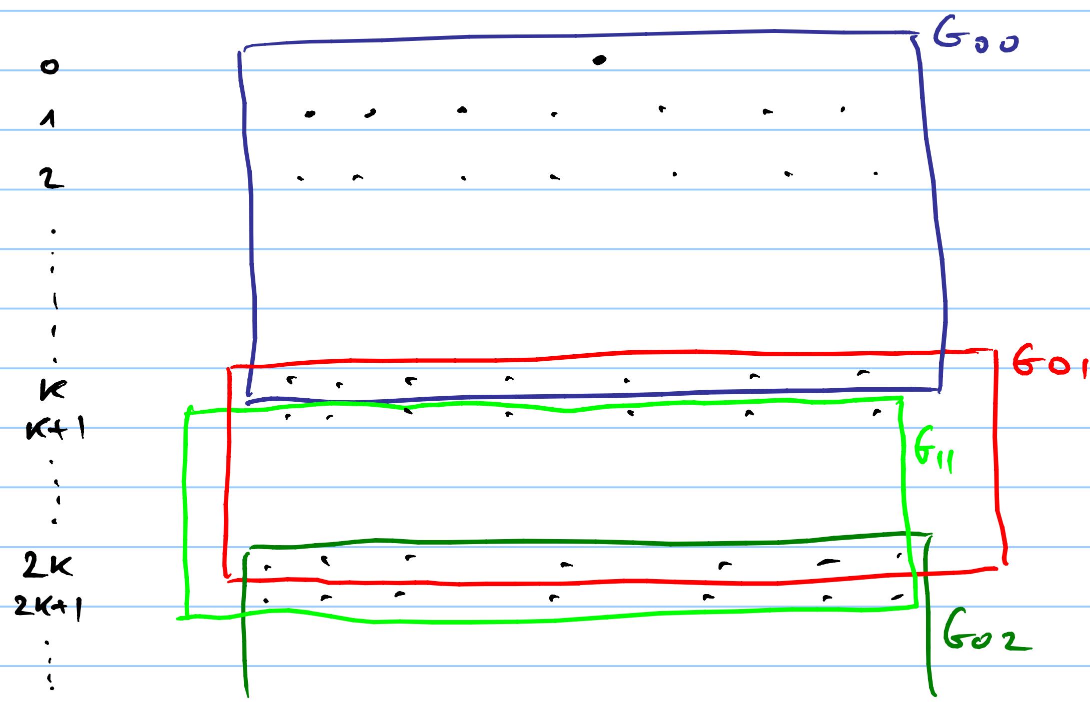
הטכניקה של Baker מחלקת את G לתת-גרפים לפי רמות BFS.

הנה האלגוריתם לקבלת $(1+\varepsilon)$ קירוב ל- min vertex cover:

- חשב רמות BFS של G.
- יהא $k=\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- עבור $i=0,1,\dots,k-1$ ו- $j=-1,0,1,2,\dots$
- יהי G_{ij} תת הגרף המושרה על קדקדים ברמות $jk+i,\dots,(j+1)k+i$

$\Leftarrow$ לפי Tamaki $bw(G_{ij})=k$, לכל i, $\{G_{ij}\}_j$ מקיימים את תכונת ההרכבה

- יהי S_{ij} VC מינימלי ב- G_{ij} (מחושב ע"י DP)
- יהי $S_i=\bigcup_j S_{ij}$ מתכונת ההרכבה, S_i הוא VC של G.
- החזר את ה- S_i בגודל מינימלי.



זמן ריצה: כמו בקודם ה-DP לוקח $4^{O(k)}|V(G_{ij})|$

בסה"כ לכל i,j:
$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_j 4^{O(k)}|V(G_{ij})| = k\cdot 4^{O(k)}\cdot n$$

כלומר, עבור ε קבוע, זמן הריצה הוא $O(n)$.

נכונות: מתכונות ההרכבה, הפלט הוא VC של G.

טיב הקירוב: יהי OPT VC מינימלי של G

יהי: OPT_i קבוצת הקודקודים של OPT ברמות $i \bmod k$.

OPT_i זרים בזוגות ואיחודם הוא OPT. לכן, קיים q

עבורו $|OPT_q| \le \frac{1}{k}|OPT| = \varepsilon|OPT|$

נתבונן ב-S_q. לכל j, S_{qj} הוא VC מינימלי ב-G_{qj}

מתכונות הצמצום, $OPT \cap V(G_{qj})$ הוא VC של G_{qj}.

מכאן ש- $|S_{qj}| \le |OPT \cap V(G_{qj})|$. לכן:

$$|S_q| = \sum_j |S_{qj}| \le \sum_j |OPT \cap V(G_{qj})|$$

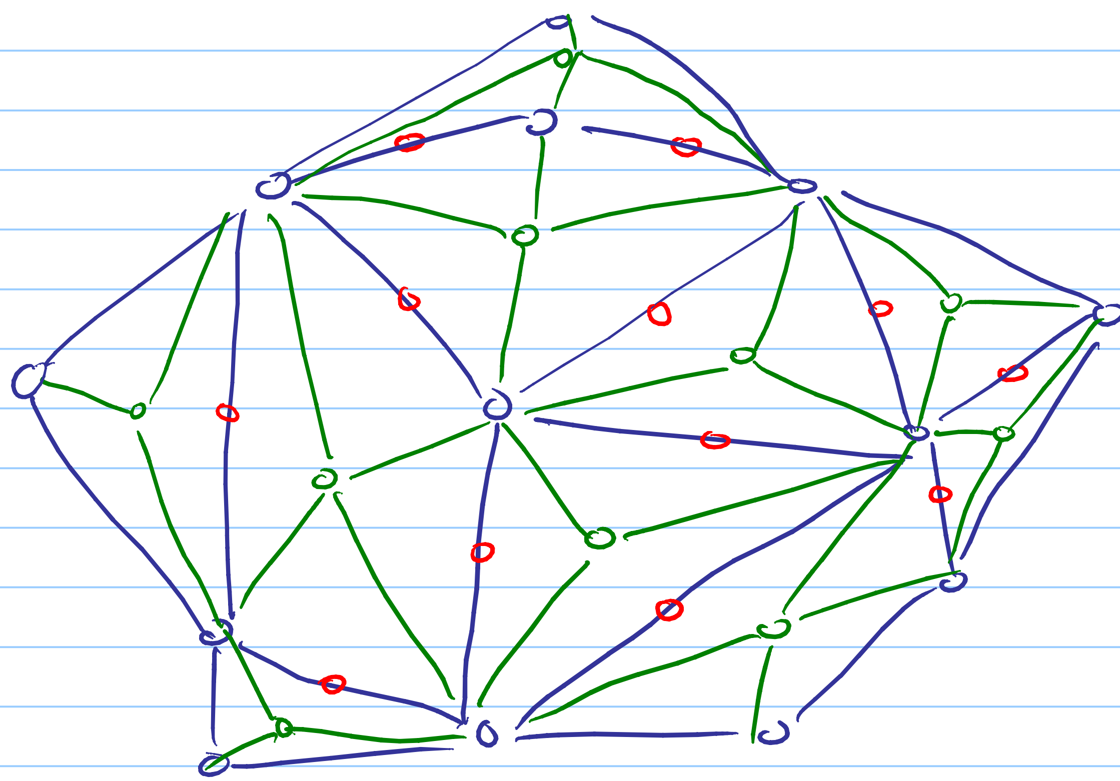
כל קודקוד של OPT מופיע בסכום פעם אחת, פרט לקודקודים של OPT ברמות $q \bmod k$ שמופיעים פעמיים.

$$= |OPT| + |OPT_q| \le (1+\varepsilon)|OPT|$$

הוכחה של המשפט של Tamaki.

יהי $R(G)$ הגרף הרדיאלי (face-vertex incidence graph) של G (תזכורת: השתמשנו בגרף זה כשלמדנו על ספרטורים מעגליים. לכל קדקד ולכל פאה של G יש צומת ב- $R(G)$.
ונצייר vf ב- $R(G)$ אם הקדקד v שייך לפאה f ב- G).

השתכנעו בעצמנו שאם G מישורי אז $R(G)$ גם מישורי.
כל פאה ב- $R(G)$ היא מדרגה 4.



הגרף המדיאלי $M(G)$ הוא הדואלי של $R(G)$
יש התאמה 1-1 $g(\cdot)$ בין קשתות של G וקדקדים של $M(G)$.

מכיוון ש- $M(G)$ דרך מישורי מדרגה 4, יש לו carving decomp.

C ברוחב $2r+4-1=2r+3$, כאשר r הוא הרדיוס של $R(G)$.

נשתמש בהתאמה החח"ע g כדי להגדיר

$$C' = \{ g^{-1}(X) : X \in C \}$$

מכיוון ש C היא carving של הקדקודים של $M(G)$,

C' הוא carving של הקשתות של G, כלומר branch decomp. של G.

מהו הרוחב של C'?

תהי X קבוצה ב- C'. מהו $\partial_G(X)$?

יהי $Y=g(X)$, ויהי $v\in\partial_G(X)$. כלומר ל v יש חלק קשת

ב- X וקשת שאינה ב- X. יהי $(d_0,d_1,\dots,d_k)$ המעגל שמתאים

ל- v. ותהי $d_i,\dots,d_j$ תת סדרה מקסימלית של חיצים

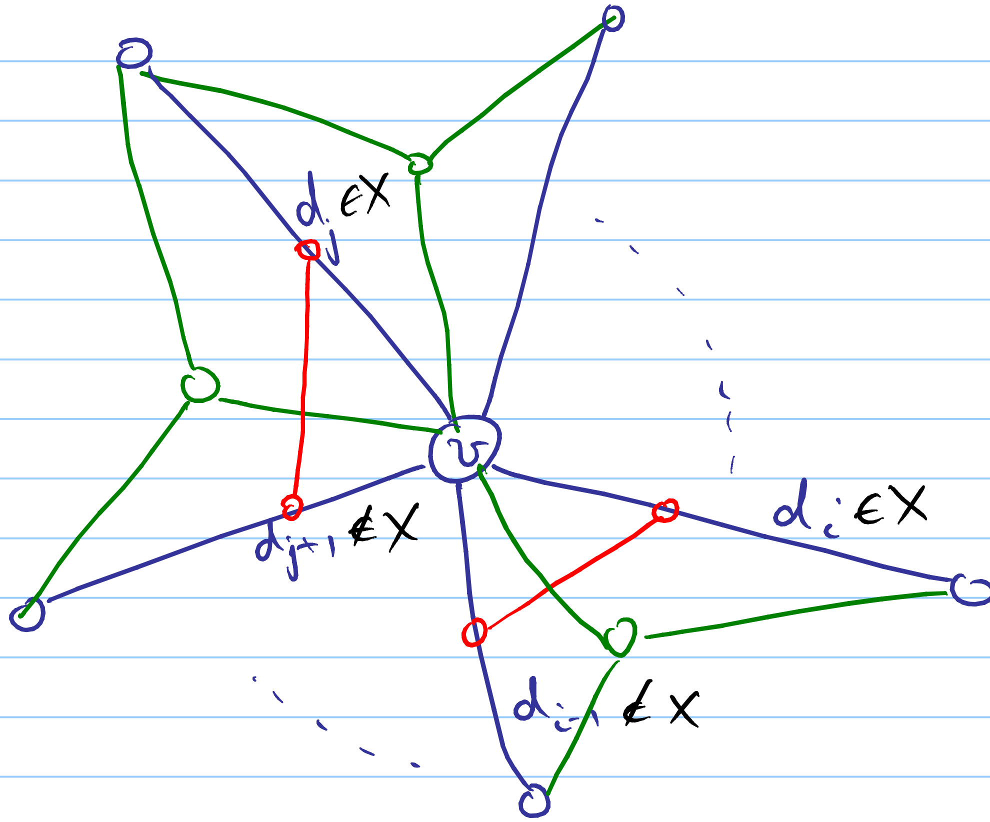
ששייכים לקשתות ב- X. כלומר d_{i-1}, d_{j+1} אינם ב- X

(ייתכן ו- $d_{i-1}=d_{j+1}$, חיבור וחיסור mod k).

הקדקודים של $M(G)$ שמתאימים לקשתות של d_j ו- d_{j+1} מקיימים

$g(d_j)\in Y$, $g(d_{j+1})\notin Y$. כלומר הצלע של $M(G)$ שקשורה

הם $g(d_j)$ ו- $g(d_{j+1})$ שייכת ל- $\delta_{M(G)}(Y)$.



נשייך את הקשת הזו ל-v, ונשים לב שב-$R(G)$ הקשת הזו חלה על v, כלומר לא יתכן שנשייך את הקשת הזו לקדקד אחר של G.

אותו טיעון תקף לקשת שקצותיה $g(d_i)$ ו-$g(d_{i-1})$. נשייך גם אותה ל-v.

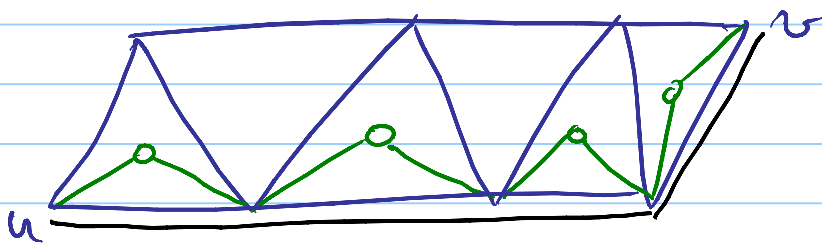
בסה"כ שייכנו ל-v לפחות שש קשתות של $\delta_{M(G)}(Y)$

$$|\partial_G(X)| = \sum_{v\in\partial_G(X)} 1 = \frac{1}{2}\sum_{v\in\partial_G(X)} 2 \le \frac{1}{2}\sum_{v\in\partial_G(X)} \text{מספר הקשתות של } \delta_{M(G)}(Y) \text{ שמשיקות ל-} v$$

$$\le \frac{1}{2}\,|\delta_{M(G)}(Y)| = \frac{1}{2}(2r+3)$$

כלומר, ה-width של c' הוא לכל היותר $r+1$.

r הוא הרדיוס של $R(G)$.



לכל מסלול ב-G או ב-G^* עם x קשתות מתאים מסלול ב-$R(G)$ עם לכל היותר $2x$ קשתות. $\Leftarrow$

$$r \le 2 + 2\min\left\{\begin{array}{l}\text{רדיוס של } G,\\ \text{רדיוס של } G^*\end{array}\right.$$

כלומר $\text{width}(c')$ הוא לכל היותר $3+2\min\left\{\begin{array}{l}\text{רדיוס של } G\\ \text{רדיוס של } G^*\end{array}\right.$

$\square$