Cycle Separators

נראה בהמשך שיש סיטואציות בהן חשוב שהספרטור שמשתמשים בו יהיה מעגל פשוט בגרף.

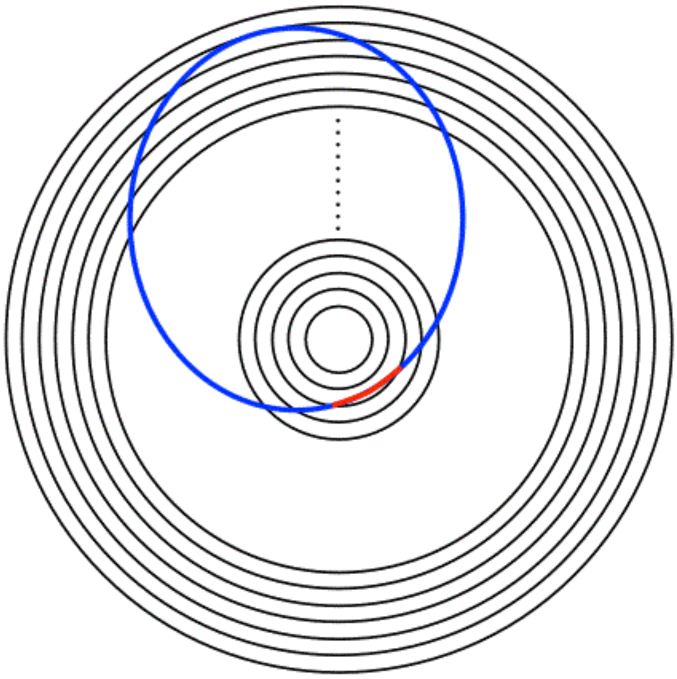
האלגוריתם שראינו יחזיר ספרטור מעגלי אם המעגל הבסיסי שמצאנו ביחס לעץ ה- BFS קצר מספיק. אחרת, נוסיף לספרטור הקדקדים של רמת BFS והמבנה המעגלי לא נשמר.

כדי למצוא מפריד מעגלי, נשתמש בדואליות של חתכים ומעגלים. הקשתות של רמת BFS מסוימת מהוות חתך בגרף. בדואלי, החתך הזה מתאים לקבוצה של מעגלים פשוטים (לאו דווקא אחד, כי החתך לאו דווקא פשוט). הרעיון הבסיסי למציאת ספרטור מעגלי קטן יהיה לעבוד עם BFS בגרף הדואלי. צריך לעבוד קצת יותר קשה כי רוצים מעגל פשוט, אבל האינטואיציה טובה.

נשים לב שאם הגרף אינו 2-קשיר, אז קיים מפריד מעגלי (למשל - קדקד) בנוסף, אם גודל הפאות אינו חסום, אז קיים מפריד מעגלי קטן (למשל - מעגל) לכן נניח שהגרף הוא גרף מישורי 2-קשיר שכל פאה בו היא משולש. (בהרבה אפליקציות ניתן להוסיף קשתות מלאכותיות כדי לספק הנחה זו, בלי לשנות את הפתרון לבעיה)

הנה הספרטור שנרצה להוכיח:

משפט – קיים אלגוריתם עם זמן ריצה לינארי אשר, בהינתן גרף פשוט 2-קשיר שכל פאה בו היא משולש, ומשקולות על הפאות, כך שמשקל כל פאה הוא לכל היותר $\frac{3}{4}$ מהמשקל הכולל, מוצא מפריד מעגלי $\frac{3}{4}$-מאוזן עם לכל היותר $4\sqrt{n}$ קשתות. (n, כרגיל, הוא מספר הקדקדים בגרף)



הרעיון הכללי:

קשתות בין קדקדים ברמה i וברמה i+1 של ה-BFS מהוות חתך בגרף. בדואלי, קשתות אלה מהוות קבוצה של מעגלים פשוטים (לא מעגל פשוט כי החתך אינו פשוט).

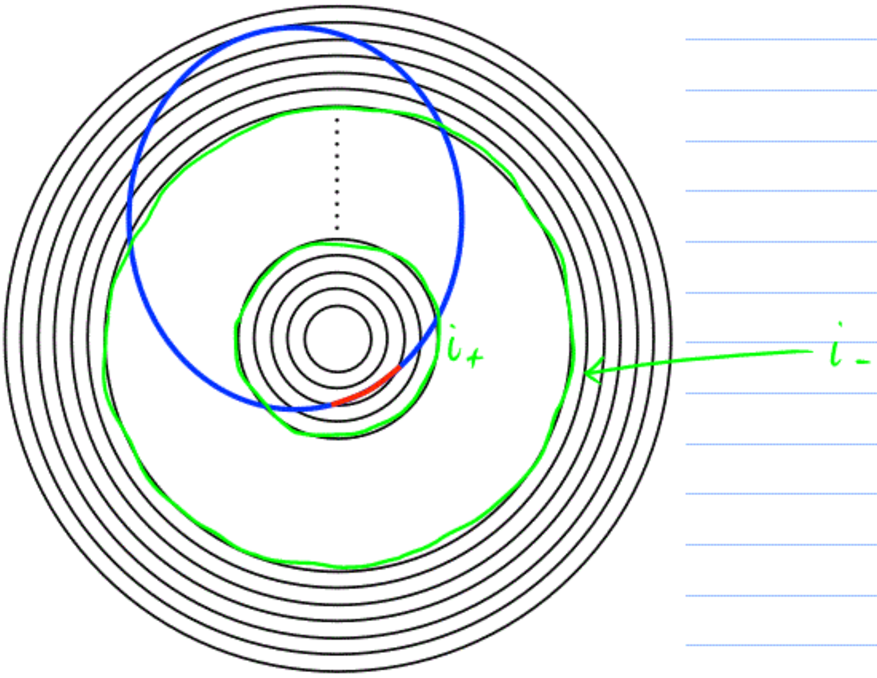
אם כך, נשתמש ב-BFS בדואלי G^*, כדי שהרמות בפרימלי G יהיו מורכבות ממעגלים. שאר האלגוריתם כמעט זהה לספרטור הקדקדים.

<u>אתגרים</u>:

- כעת צריך שה-T ביחס אליו מוצאים את מפריד המעגל הבסיסי יהיה מונוטוני ביחס לרמות BFS דואלי, ולא פרימלי. טוענים ש BFS ב-G לא יעבוד
- איך מתמודדים עם כך שכל רמה מורכבת ממספר מעגלים, ולא ממעגל אחד.
- כשהשתמשנו ב-BFS פרימלי הרמות היו זרות בקדקדים. האם המעגלים המתקבלים מ-BFS דואלי זרים זה לזה? עלול ליצור מעגלים לא פשוטים.

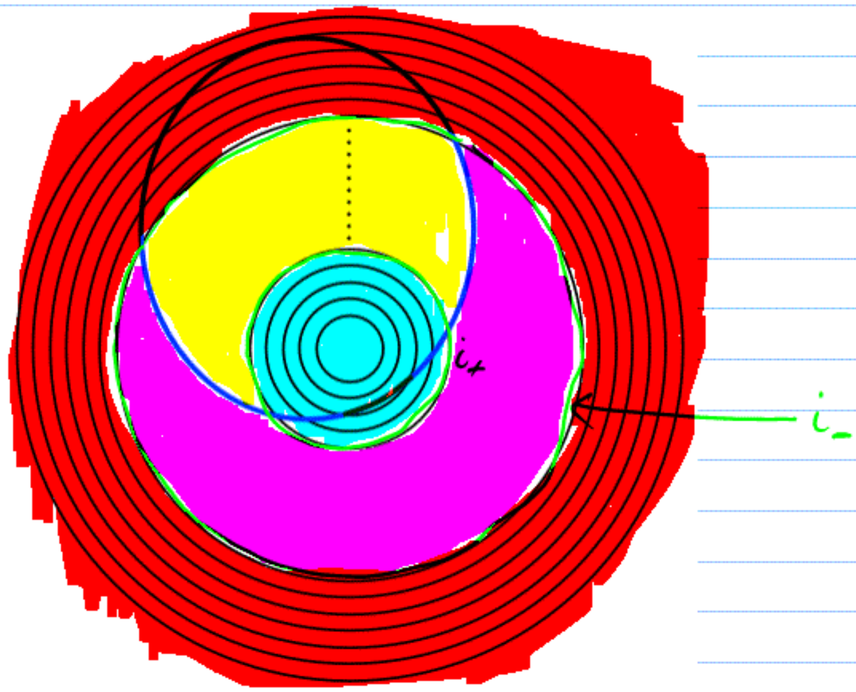
אם כל רמה היא
מעגל פשוט:

מצב רמה i_-
כמו i_+ באלגו'
הקודם!

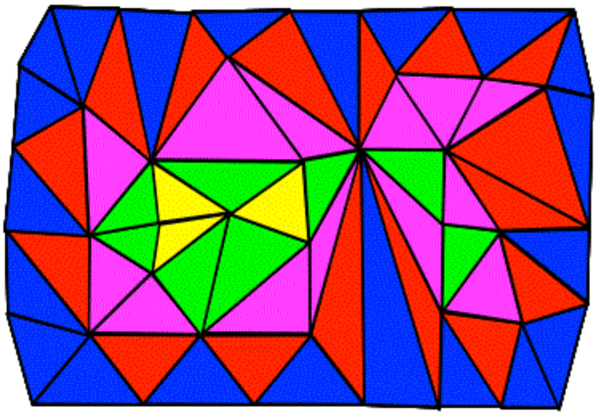


אחד מהאזורים
הצבועים חייב
להיות בעל
משקל בין $\frac{1}{4}$ ל-
$\frac{3}{4}$ המשקל הכולל

הגבול של כל
אזור הוא מעגל
פשוט!

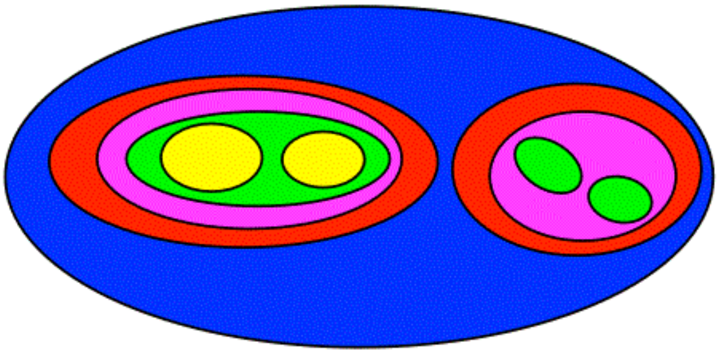


BFS ב-G^*



צביעה של הפאות של G לפי
רמתן ב-BFS של G^*

הקשתות שמפרידות בין פאות ברמות
עוקבות של ה-BFS הדואלי מהוות
חתך ב-G^*, ולכן קבוצה של מעגלים
ב-G.
המעגלים הללו זרים בקשתות, אבל
לא בקדקדים.



תאור סכימטי של המעגלים ב-G
שמפרידים בין פאות ברמות
עוקבות של BFS ב-G^*.

המעגלים מקוננים זה בזה. ניתן לתאר את יחס הקינון באמצעות
עץ שנבנה על הרכיבים הקשירים (של G^*).

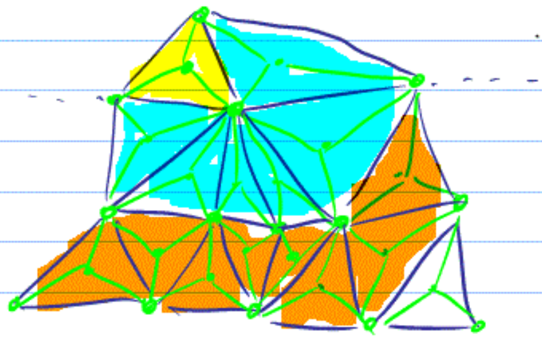
כדי לקבל מעגלים זרים בקדקדים נשתמש ב-BFS בגרף
שקשור ל-G^*, אבל אינו בדיוק G^*.

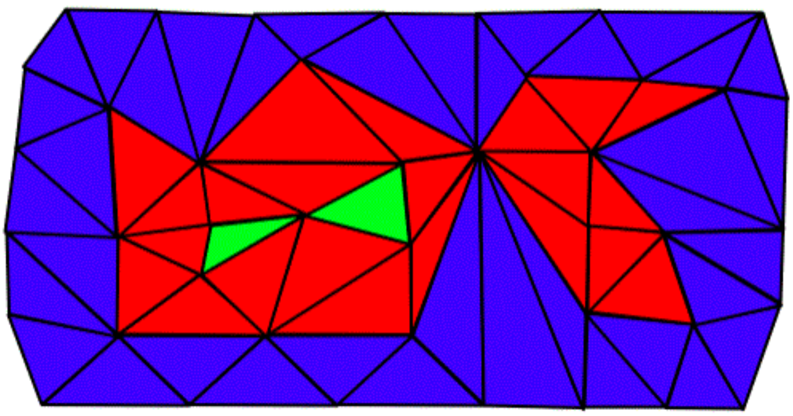
<u>גרף הרדיאלי</u> (Radial / Face-Vertex incidence graph)

לגרף קשיר G, נגדיר גרף רדיאלי $FV(G)$: לכל קדקד של G יש קדקד ב-$FV(G)$. לכל פאה של G יש קדקד ב-$FV(G)$. אם f פאה של G, ו-v קדקד ששייך לפאה f, אז הקדקדים ב $FV(G)$ שמתאימים ל-f ול-v שכנים אחד של השני.

נגדיר רמה של פאה f להיות המספר המינימאלי של פאות של G במסלול מ-f_∞ ל-f ב-$FV(G)$, פחות 1. במילים אחרות, אם $\tilde{T}$ הוא עץ BFS של $FV(G)$ שמושרש ב-f_∞, אז הרמה $\ell(f)$ של פאה f היא מספר הפאות של G במסלול מ-f_∞ ל-f ב-$\tilde{T}$.

f_∞ היא הפאה היחידה שרמתה אפס.





כעת מעגלים בין רמות שונות זרים הן בקשתות והן בקדקדים

עץ הרכיבים הקשירים.

לכל i, יהיו F_i^+ הפאות של G עם רמה לפחות i

$$F_i^+ = \{ f \in F(G) : \ell(f) \geq i \}$$

יהי K_i^+ קבוצת הרכיבים הקשירים של תת הגרף של G^* המושרה ע"י F_i^+.
ניתן לתאר את קבוצת הרכיבים הקשירים כעץ $\mathcal{T}$.
השורש של $\mathcal{T}$ הוא הרכיב היחיד ב K_0^+, כלומר G^* כולו.
הילדים של רכיב $K \in K_i^+$ הם הרכיבים של K_{i+1}^+ המוכלים ב-K.

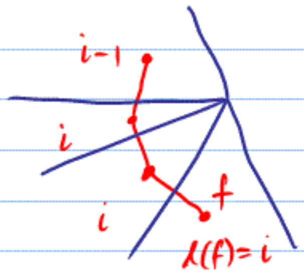
הקשתות של חתך ברמה i מפרידות ב-G^* פאות ברמה $i-1$ מפאות ברמה i.

<u>למה</u> - החתכים $\{\delta_{G^*}(K) : K \in K_i^+ \ \forall i > 0\}$ זרים בקשתות

<u>הוכחה</u> - תהי fg קשת ב-$\delta_{G^*}(K)$ לרכיב קשיר כלשהו K ברמה i.
בה"כ $g \in K$, $f \notin K$. הרמה של f חייבת להיות קטנה מ-i,
ומכיוון ש f ו-g חולקים קדקד ב-G, הרמה של f היא $i-1$, ושל g היא i.
לכן, כל רכיב K' כך ש $f \in \delta_{G^*}(K')$, חייב להיות רכיב ברמה i שמכיל את g,
כלומר K. □

<u>למה</u> - לכל רכיב K ב-$\mathcal{T}$, $\delta_{G^*}(K)$ הוא חתך פשוט.

<u>הוכחה</u> - צריך להראות ש-K ו-$\bar{K} = V(G^*) \setminus K$ קשירים ב-G^*. K קשיר בהגדרה.
נראה שכל פאה $f \in \bar{K}$ חוץ מ-f_∞ מחוברת ב-$\bar{K}$ לפאה ברמה נמוכה
יותר. אינדוקציה תראה שכל פאה ב-$\bar{K}$ מחוברת ל-f_∞, כלומר $\bar{K}$ קשיר.
נניח שהרמה של f היא i.
לפאה f קדקד שסמוך לפאה ברמה $i-1$
הוכחה בציור:
כל הפאות על המסלול האדום אינן ב-K
כי אחרת $f \in K$.
□



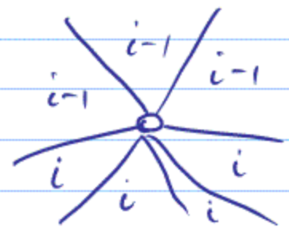
מהדואליות של חתכים פשוטים ומעגלים פשוטים נובע שהקשתות של $\delta_{G^*}(K)$
מהוות מעגל פשוט ב-G, שנסמנו $X(K)$, ושמעגלים אלו זרים
בקשתות עבור K שונים.

<u>למה</u> – עבור K, K' רכיבים ברמות שונות, $X(K)$ ו-$X(K')$ זרים בקדקדים.
<u>הוכחה</u>: יהי $v \in V(G)$. כל הפאות שחלות על v הן מאותה רמה i או $i-1$
עבור i שלם כלשהו. לכן אם e קשת שחלה על v ושייכת ל-$X(K)$ עבור רכיב
K כלשהו, K חייב להיות רכיב ברמה i. □

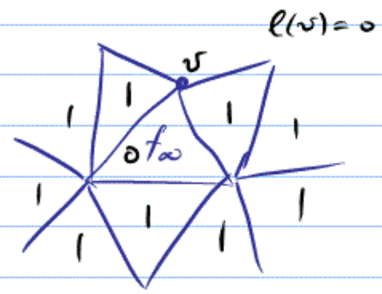
הצלחנו לקבל את מבנה הרמות שרצינו – כזה שמורכב ממעגלים מקוננים.
על מנת שנוכל לחסום את מספר הקשתות במסלול בסיסי שמחבר בין
שני מעגלים, אנו צריכים להגדיר עץ פורש T של G בעל תכונות מונוטוניות ביחס
לרמות ה-BFS של $FV(G)$.

בדומה להגדרת הרמה של פאה, נגדיר רמה של קדקד $v \in G$ להיות אחד פחות מהמספר
המינימלי של קדקדים של G במסלול מ-f_∞ ל-v ב-$FV(G)$.

כבר ראינו שעבור רכיב K ברמה i, הקשתות של $X(K)$ חלות על פאה אחת ברמה
$i-1$ ופאה אחת ברמה i. מההגדרה של רמה של קדקד נובע שכל הקדקדים
של $X(K)$ הם קדקדים ברמה $i-1$.



עבור i כללי.



סביב f_∞ (שרמתה אפס)

נגדיר עץ פורש T של G מתוך עץ BFS T' של $FV(G)$.
עבור קדקד v של G עם רמה $0<l(v)$, ההורה של v ב-T' הוא
פאה f של G, וההורה של f הוא קדקד u של G.
מכיוון שכל פאה ב-G היא משולש, vu היא קשת של הפאה f.
נגדיר כי הקשת vu היא קשת ב-T, וש-u הוא ההורה של v ב-T.
כדי להשלים ההגדרה, נבחר את אחד משלושת הקדקדים של G ברמה אפס
להיות השורש של T, ונגדיר אותו כהורה של שני הקדקדים הנותרים ברמה אפס.

כעת T הוא עץ פורש של G, ולכל קדקד v עם רמה $0<l(v)$,
ההורה של v ב-T הוא קדקד ברמה $l(v)-1$. זוהי תכונת
המונוטוניות שחפשנו.

מכך שכל הקדקדים של $X(K)$ הם באותה רמה נובע

1) מסלול משורש לקדקד ב-T אינו משתמש באף קשת של אף $X(K)$

<u>הוכחה</u>: כל הקשתות במסלול כזה מונוטוניות ממש ביחס לרמת קדקדים,
אבל קבועה ב-$X(K)$.

2) אם מסלול משורש לקדקד ב-T נכנס לרכיב כלשהו K (כלומר, מכיל
קשת vu כך ש $u\in X(K)$ ו-v מוקף ממש ע"י $X(K)$), אז הוא
אינו יוצא מ-K.

<u>הוכחה</u>: משום ש-v מוקף ממש ע"י $X(K)$, דרגתו גדולה מזו של הקדקדים
של $X(K)$. משום שהמסלול מונוטוני, הוא לעולם לא ישוב לקדקד של $X(K)$.

תכונות 1), 2) מבטיחות שהמעגל הבסיסי C נכנס בדיוק לרכיב אחד ברמה i לכל
אחת מהרמות (i_{max}, i_{min}). לכל אחד מהרכיבים הללו C נכנס בשני
קדקדים שונים. כלומר, התמונה שהנחנו לעיל מוצדקת.

מסלולים קצרים ביותר בגרף עם אורכים שליליים

הנחה: אין מעגלים שאורכם שלילי (אחרת מרחקים אינם מוגדרים)
האלגוריתם שנלמד מזהה מעגל שלילי אם קיים.

תזכורת: Bellman-Ford

חזור $n-1$ פעמים:
- בצע רילקסציה לכל הקשתות

נכונות:
באיטרציה ה-k מחושבים מרחקים במסלולים שבהם לכל היותר k קשתות.

זמן ריצה: $O(n\cdot m)$, כלומר $O(n^2)$ בגרף מישורי

היום נראה אלגוריתם שרץ בזמן $O(n\log^2 n)$

(הטוב ביותר שידוע היום: $O(n\log^2 n/\log\log n)$)

תזכורת מהשעור הקודם ומהתרגיל: עודפים (slack costs)

$p(v)$ - פונקצית מחיר $p: V\to\mathbb{R}$

אורך עודף $c_p(uv) = c(uv)+p(u)-p(v)$

״בכמה המסלול דרך uv יקר מהמסלול עפ״י p?״

מהתרגיל: - שימוש באורכים עודפים אינו משנה מסלולים קצרים.
- האורך של מסלול מ-s ל-t משתנה ב- $p(s)-p(t)$
- אם p מייצגת מרחקים בגרף אז c_p אי-שליליות.

$\Leftarrow$ אם יודעים מרחקים מקדקד כלשהו v, ניתן לחשב מרחקים

מכל קדקד z באמצעות Dijkstra בזמן $O(n)$.

הרעיון: לשלב האבחנה הזו עם פתרון רקורסיבי באמצעות ספרטורים.

האלגוריתם: $SP(G, s)$

1 - מצא מפריד מעגלי $C \Rightarrow G_{in}, G_{out}$

2 - בחר קדקד כלשהו $r \in C$

3 - חשב δ_i: מרחקים קצרים מ-r ב-G_i (רקורסיבית $SP(G_i, r)$)

4 - חשב A_i: מרחקים בין כל זוג קדקדים של C ב-G_i
(באמצעות MSSP, δ_i הוא העץ ההתחלתי)

- יהי G_i' הגרף המלא על הקדקדים של C, כאשר אורך הקשת uv
נתון ע"י המרחק מ-u ל-v ב-G_i (נתון ב-A_i)

5- חשב B: מרחקים קצרים ב-G מ-r לכל הקדקדים של C
ע"י Bellman-Ford בגרף $G' = G'_{in} \cup G'_{out}$

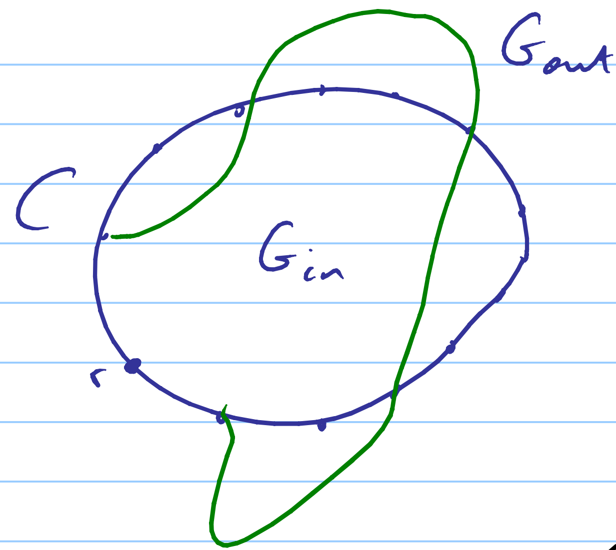
נקרא G'
Dense Distance
Graph

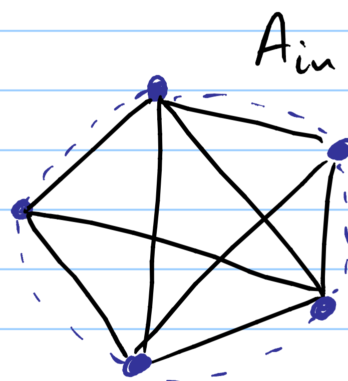
6- חשב δ_i': מרחקים קצרים ב-G מ-r לכל הקדקדים של G_i

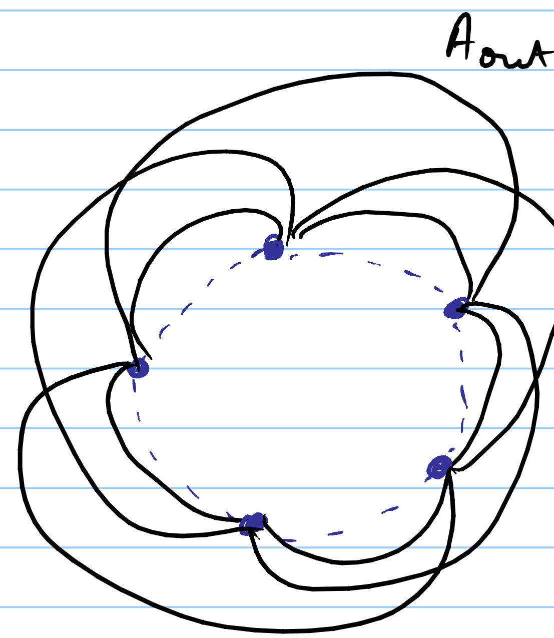
ע"י Dijkstra בגרף G_i, עם פונקצית מחיר δ_i ואתחול
המרחקים לקדקדים של C לערכם ע"פ B.

- יהי $\delta' = \delta'_{in} \cup \delta'_{out}$ מרחקים מ-r ב-G

7 - חשב מרחקים מ-s ב-G ע"י Dijkstra ופונקצית מחיר δ'.







שלב ריצה:

.1 מפרידה -	G	$O(n)$
.4 MSSP -	G_i	$\sum_i O(n_i \log n_i) = O(n \log n)$
.5 Bellman-Ford	G'	$O(\sqrt{n})$ קדקודים, $O(n)$ לשלב $\Leftarrow O(n^{3/2})$
.6 Dijkstra	G_i	$\sum_i O(n_i) = O(n)$
.7 Dijkstra	G	$O(n)$

$$O(n^{3/2})$$

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + O(n^{3/2}) = O(n^{3/2})$$

כבר יותר טוב מ $O(n^2)$, אבל הבטחתי ....$O(n \log^2 n)$

צוואר הבקבוק הוא חישוב Bellman-Ford ב-G'.

בתחילת האיטרציה ה-k של BF, $B(u)$ הוא המרחק מ-r ל-u שמשתמש בלכל היותר k קשתות.
לעשות רילקסציה לכל הקשתות של G' פירושו למצוא:

$$\forall v \in C \qquad B(v) = \min_{u \in C} \left\{ \begin{array}{c} B(u) + A_{in}(u,v), \\ B(u) + A_{out}(u,v) \end{array} \right\}$$

אם נגדיר $A'_i = B(u) + A_i(u,v)$

A'_i היא מטריצה עם $O(\sqrt{n})$ שורות ועמודות.

אז צעד של BF מוצא את האיבר המינימלי בכל עמודה של A'_i

באופן נאיבי זה לוקח $O(n)$ זמן (כמספר האיברים ב-A'_i)

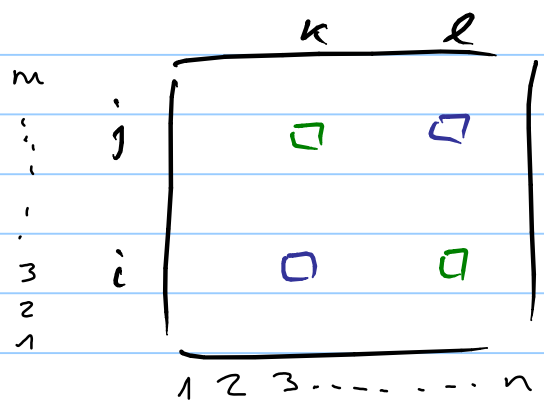
נראה שניתן לעשות זאת ב $O(\sqrt{n} \log n)$ זמן

(למעשה אפשר ממש ב-$O(\sqrt{n})$ SMAWK).

עיקול: תכונת Monge

מטריצה $A_{n\times m}$ נקראת Monge אם עבור כל $i<j$ ו $k<l$ קיים

$$A_{ik}+A_{jl} \geq A_{il}+A_{jk}$$



תזכ׳: $\mathcal{E}(j)=\arg\min_i A_{ij}$ סדרת האינדקסים של השורות בהן מתקבלים האיברים המינימליים בעמודה

<u>למה</u> - אם A מטריצת Monge אז הסדרה $\mathcal{E}$ אינה עולה.

הוכחה: נניח $\mathcal{E}(k)=i$. כלומר, עבור $j>i$,

$$A_{ik}\leq A_{jk}$$

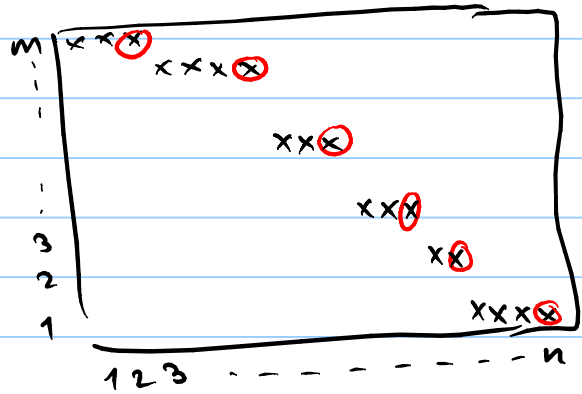
מכיוון שעבור $l>k$

$$A_{ik}+A_{jl}\geq A_{il}+A_{jk}$$

חייב להתקיים

$$A_{jl}\geq A_{il}$$

כלומר $\mathcal{E}(l)\leq i$ $\square$



למשל, כך יכולה להראות סדרת האינדקסים של האיברים המינימליים בעמודות.

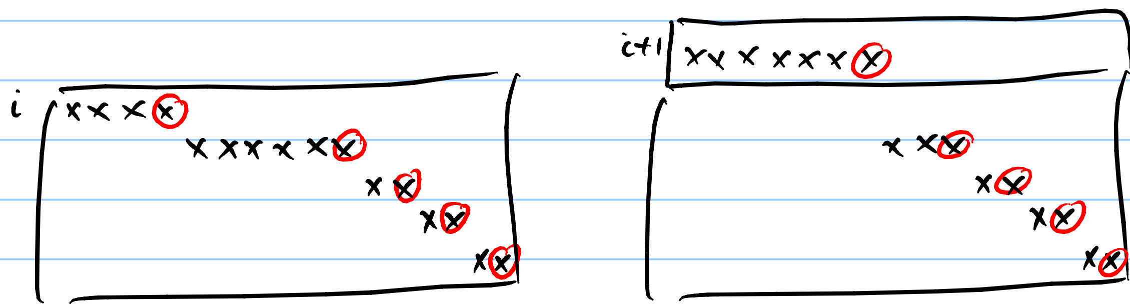
נגדיר breakpoint של A להיות זוג (i,k) כך ש $\mathcal{E}(k)=i$ אבל $\mathcal{E}(k+1)\neq i$

נשים לב שאם ידועה סדרת ה-breakpoints, אז ניתן למצוא את כל האיברים המינימליים של כל העמודות בזמן לינארי במספר העמודות.

כיצד מוצאים את ה breakpoints של A?

נניח שמצאנו את ה-breakpoints של המטריצה המתקבלת מ-i השורות הראשונות של A.

לכל BP (j,k) בסדר עולה של העמודות, נשווה את $A_{i+1,k}$! $A_{j,k}$



מהלמה:

אם $A_{i+1,k} \le A_{j,k}$ אז לכל עמודה $k > l$ המינימום נמצא בשורה $i+1$

$\Leftarrow$ ה-BP (j,k) מתבטל

אם $A_{i+1,k} > A_{j,k}$ אז לכל עמודה $k < l$ המינימום אינו בשורה $i+1$.

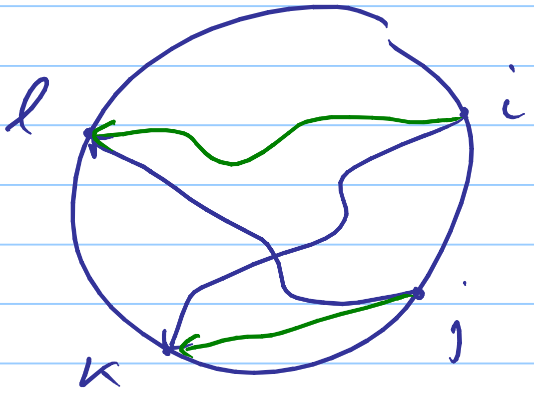
$\Leftarrow$ אפשר להפסיק להשוות

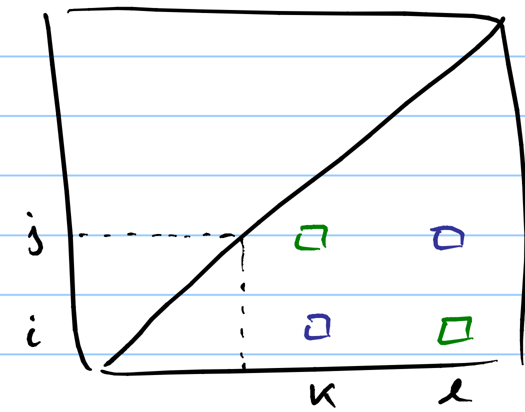
אם (j,k) ה-BP הראשון ששרד, צריך למצוא את העמודה בה
שורה k מפסיקה להיות המינימום ושורה j מתחילה להיות המינימום.
ניתן לעשות זאת ע"י חיפוש בינארי.

<u>אנליזת זמן:</u>

בכל פעם שמוסיפים שורה מוסיפים לכל היותר BP אחד.
לכן, מספר ה-BP הכולל שנוספים לכל היותר m
כל השוואה שנעשית, פרט לאחרונה בכל איטרציה, מורידה BP אחד.
לכן מספר ההשוואות הכולל הוא לכל היותר $2m$.
בנוסף, בכל איטרציה עושים חיפוש בינארי של לכל היותר n איברים,
כלומר בזמן $O(\log n)$.
סה"כ $O(m\log n)$ למציאת ה-BP של מטריצה עם m שורות ו-n עמודות!

מה הקשר לבעיה שלנו?

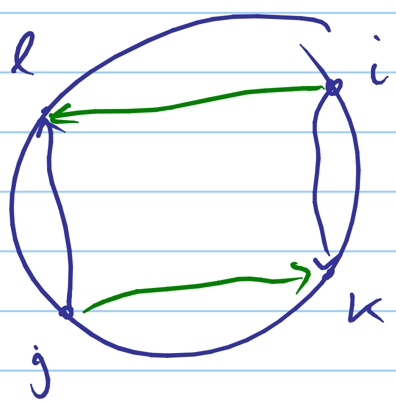


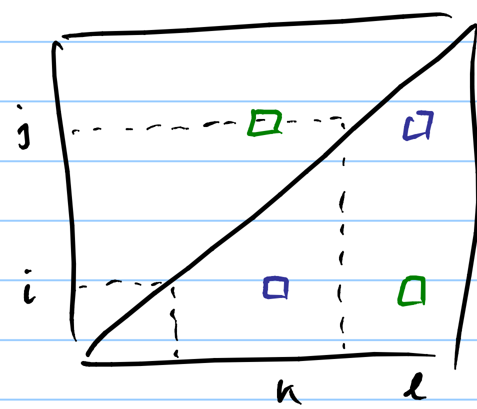


$i < j < k < l$

$$\underset{B(i)}{\overset{}{A(i,k)}} + \underset{B(j)}{A(j,l)} \geq \underset{B(i)}{A(i,l)} + \underset{B(j)}{A(j,k)}$$

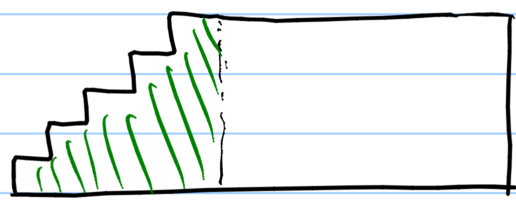
$$A'(i,k) + A'(j,l) \overset{?}{\geq} A'(i,l) + A'(j,k)$$

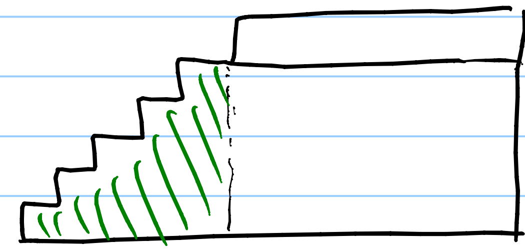




???

המטריצה שלנו אינה Monge, אבל כל מטריצה משולשת הוא Monge.





לשורה ה $(i+1)$ אין כל השפעה על ה- BPs במשולש הריק.
שאר המטריצה ריבועית, ולהוסיף שורה למטריצה ריבועית אנו כבר יודעים.

כלומר, אנחנו יודעים למצוא את ה- BPs של מטריצת Monge משולשת ב $O(n\log n)$ זמן.

$\Leftarrow$ יודעים למצוא את האיבר המינימלי בכל עמודה של מטריצת Monge משולשת ב- $O(n\log n)$ זמן

$\Leftarrow$ יודעים למצוא את המינימום בכל עמודה של A_i' ע"י חלוקה לשתי מטריצות משולשות, והשוואת שני האיברים המינימליים בכל עמודה ב $O(n\log n)$ זמן.

כאן n הוא מספר השורות/עמודות במטריצה. כלומר, גודל הספרטור C כלומר $O(\sqrt{n})$.

מציאת כל המינימום בעמודות שקולה לאיטרציה אחת של BF.
מספר האיטרציות הוא כמספר הקדקודים (שזה $\sqrt{n}$), כלומר
סה"כ זמן הריצה של BF הוא
$$\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\log(\sqrt{n}) = O(n\log n)$$

וזמן הריצה של האלגוריתם כולו:

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + O(n\log n) = n\log^2 n$$

מהו צוואר הבקבוק האמיתי של האלגוריתם?

- MSSP $\quad O(n\log n)$
- BF $\quad O(n\log n) \quad$ (אפשר $n\alpha(n)$)
- Dijkstra $\quad O(n)$

כלומר, MSSP הוא צוואר הבקבוק.

הזכרנו כבר של - MSSP יש חסם תחתון של $O(n\log n)$.
האם אין תקווה לשיפור?

1 $\Leftarrow$ אם הזמן של MSSP ו- BF אינו מאוזן, יעלים לדרוש להוריד יותר BF.

במקום להלך לשניים, משתמשים ב- r-division עם

$r = \frac{n}{\log n}$ (בספרטור רגיל $r = \frac{3n}{4}$)

כל איטרציה עדיין לוקחת $n\log n$ (עבור MSSP ו BF מאוזנים)
אבל עומק הרקורסיה הוא רק

$$\log_{\log n}(n) = \frac{\log n}{\log\log n}$$

וזמן הריצה יוצא

$$O(n\log^2 n/\log\log n)$$

② החסם התחתון של MSSP אינו תופס לחישוב המרחקים
רק בין הקדקדים של הפאה האינסופית

?

חסם תחתון
חזק יותר

אלגוריתם לינארי
לבעיה