Separators

מפריד (Separator) בגרף הוא קבוצה של
קדקדים או קשתות שמחיקתם מפרידה את הגרף
לשני חלקים. ספרטורים משמשים כבסיס לאלגוריתמי
divide-and-conquer:

- מצא מפריד בגרף
- מצא רקורסיבית פתרון לבעיה בכל אחד מהחלקים
- השתמש בפתרונות החלקים כדי למצוא/להרכיב פתרון לגרף כולו.

על מנת שהגישה הזו תעבוד, יש צורך להשיג שתי תכונות
עיקריות של הספרטור:

① איזון - כל אחד מהחלקים אינו קטן מדי
(אחרת הרקורסיה אינה חוסכת דבר)

② ספרטור קטן - אחרת קשה בדרך לתפור פתרון
לגרף כולו מהפתרונות הרקורסיביים.

פונקצית משקל – קדקדים / קשתות / שווה

$$\sum w = 1$$

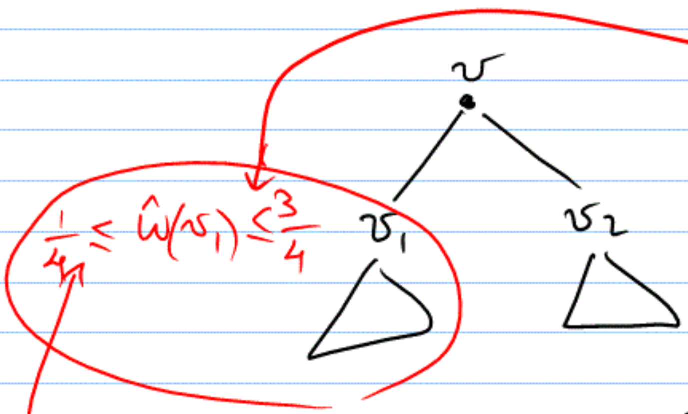
איזון - כל אחד משני החלקים שוקל, נגיד, לכל היותר $\frac{3}{4}$.

משפט - יהי T עץ מדרגה ≤ 3 עם משקלות לקדקודים כך שכל קדקוד שוקל לכל היותר $\frac{1}{4}$. ניתן למצוא בזמן ליניארי קשת $\hat{e}$ כך שכל רכיב של $T-\hat{e}$ שוקל לכל היותר $\frac{3}{4}$.

הוכחה - בחר קדקוד מדרגה 1 כשורש. נגדיר לכל קדקוד v

$$\hat{\omega}(v)=\sum\{\omega(u) : \text{u צאצא של v}\}$$

יהי v קדקוד כך ש- $\hat{\omega}(v)>\frac{3}{4}$, אבל לכל צאצא u של v $\hat{\omega}(u)\leq\frac{3}{4}$.



בה"כ $\hat{\omega}(v_1)\geq\hat{\omega}(v_2)$. לכן

$$\hat{\omega}(v_1)\geq\frac{1}{2}\left(\hat{\omega}(v)-\omega(v)\right)\underset{\omega(v)\leq\frac{1}{4}}{\geq}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

כלומר, הקשת vv_1 מפרידה את הגרף לשני חלקים שמשקל כל אחד מהם לכל היותר $\frac{3}{4}$. $\square$

קבוצת קשתות שמוצרת מעגל קודקודים **מפריד α-מאוזן** אם גם תת-הגרף המוקף (ממש) ע"י המעגל, וגם זה שאינו מוקף ע"י המעגל שוקלים לכל היותר α.

Fundamental Cycle Separator

<u>משפט</u> - יהי G גרף מישורי עם משקולות $w(f)$ לפאות, כך שמשקל כל פאה לכל היותר $\frac{1}{4}$, וכן שדרגת כל פאה לכל היותר 3.
יהי T עץ פורש של G. קיימת קשת $\hat{e}$ שאינה ב-T
כך שהמעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל T הוא מפריד
מעגלי $\frac{3}{4}$-מאוזן.

<u>הוכחה</u>: יהי T^* העץ הדואלי ל-T. דרגתו של T^* לכל היותר 3, וקודקודיו של T^* הן פאות של G, כך שמשקל כל פאה הוא לכל היותר $\frac{w}{4}$.
תהי $\hat{e}$ המפריד של T^* מהמשפט הקודם.
החתך הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל T^* הוא חתך פשוט ($\hat{e}-T^*$ מורכב משני עצים שפורשים את שני תתי הגרפים המופרדים ע"י החתך). מהדואליות של חתכים ומעגלים, המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T הוא מעגל פשוט שמשקלו בין $\frac{1}{4}$ ל $\frac{3}{4}$ מהמשקל.

∎

ספרטור קודקודים קטן

<u>משפט</u> - קיים אלגוריתם בזמן ריצה לינארי שבהנתן גרף מישורי עם משקולות על הקשתות, כך שאף קשת אינה משקלה יותר מ $\frac{1}{4}$, מחלק את G לשני תת גרפים G_1, G_2 כך ש- $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$,

$$\frac{3}{4} \geq w(G_i) \quad \text{(מאוזן)}$$

$$4\sqrt{|V(G)|} \geq |V(G_1) \cap V(G_2)| \quad \text{(קטן)}$$

!

הערה: מהמשפט נובע גם ספרטור קטן ביחס למשקלות על קדקודים / פאות.
כדי להוכיח המשפט נתאר האלגוריתם:

- הוסף ל- G קשתות במשקל אפס כדי להפוך אותו לטריאנגולציה.
- יהי T עץ BFS של G
- מצא מעגל בסיסי C ביחס ל- T שהוא ספרטור $\frac{3}{4}$ מאוזן.

(לשם כך נזכיר לנו וראינו של משפט ה- fundamental cycle separator שעובד עם משקולות על הקשתות - בתרגול!)

שימו לב - אם C קטן (פחות מ $4\sqrt{|V(G)|}$ קשתות) - סיימנו!

נסמן ב- V_i את קבוצת הקדקודים ברמה ה-i של ה-BFS

יהיו i_{min}, i_{max} הרמה המינימאלית והמקסימאלית של קדקד של C.

נגדיר:

$$W_{\le i} = w(\{uv: \text{הרמה של } u \text{ ו-} v \text{ לכל היותר } i\})$$

$$W_{>i} = w(\{uv: \text{הרמה של } u \text{ וגם } v \text{ גדולה מ-} i\})$$

יהי i_- השלם הגדול ביותר כך ש:

1) $i_{min} < i_- < i_{max}$

2) $|V_{i_-}| \le \sqrt{n}$

3) $W_{\le i_-} \le 3/4$

אז i_{min} אם לא מתקיימים כל התנאים.

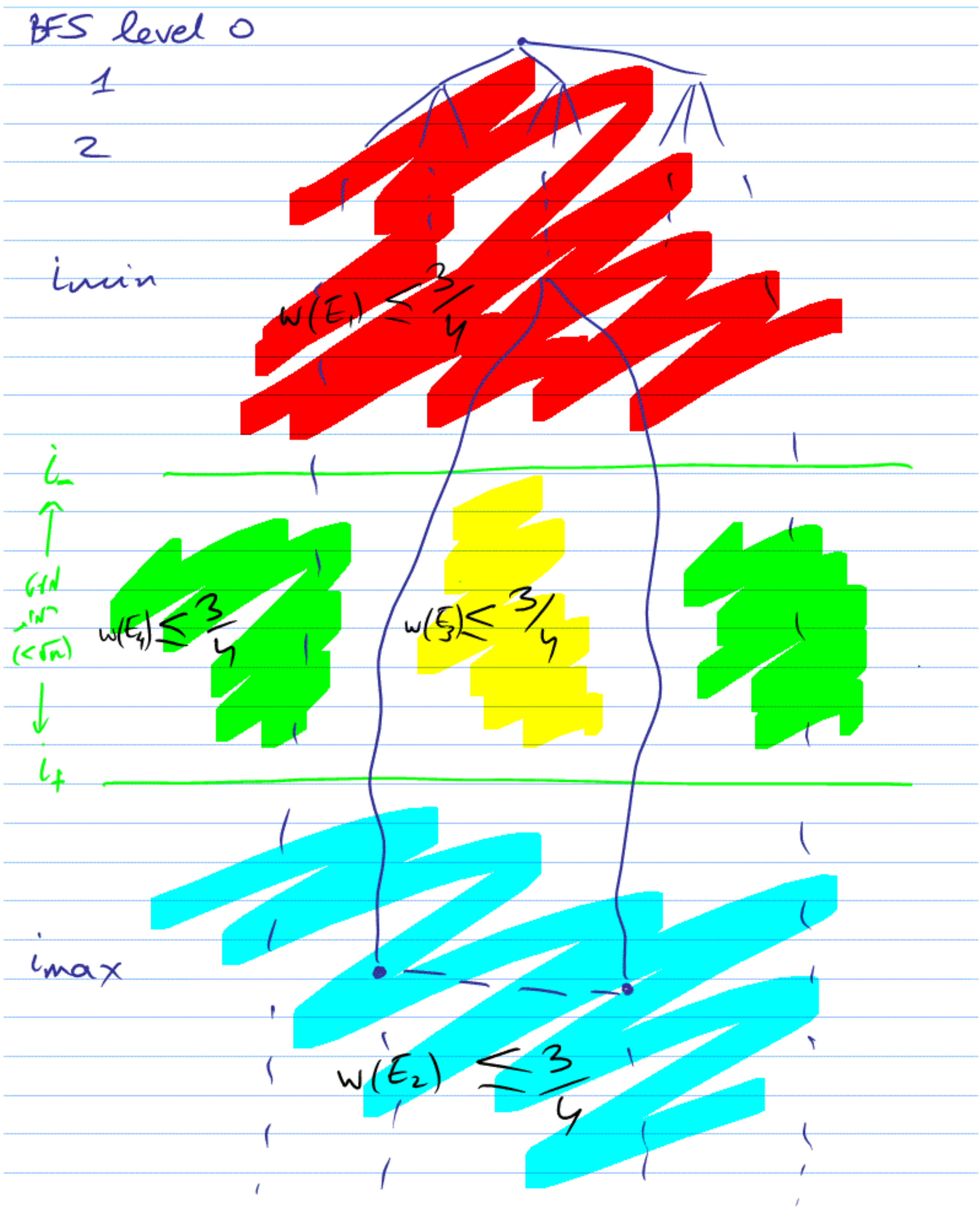
יהי i_+ השלם הקטן ביותר כך ש

1) $i_- < i_+ < i_{max}$

2) $|V_{i_+}| \le \sqrt{n}$

3) $W_{>i_+} \le 3/4$

אז i_{max} אם לא מתקיימים כל התנאים


BFS level 0
1
2
imin
$w(E_1) \le 3/4$
i_-
$w(E_4) \le 3/4$
$w(E_3) \le 3/4$
$(<\sqrt{n})$
i_+
imax
$w(E_2) \le 3/4$

מכיוון שלפחות אחד מ $W_{\le i}, W_{>i}$ חייב להיות $\ge \frac{3}{4}$

כל רמה בין i_- ל i_+ חייבת להכיל לפחות $\sqrt{n}$ קדקדים.

לכן מספר הקדקדים ברמות אלו הוא לפחות $(i_+ - i_- - 1)\sqrt{n}$

מכיוון שמספר הקדקדים הכולל הוא n, נקבל $i_+ - i_- - 1 < \sqrt{n}$.

נגדיר: E_1 - קשתות שקצותיהן ברמה $\ge i_-$ מבחירה $w(E_1) \le 3/4$

E_2 - 〃 〃 〃 $< i_+$ 〃 $w(E_2) \le 3/4$

E_3 - קשתות נמצאות מוקפות ע״י C. מכיוון ש C ספרטור מאוזן $w(E_3) \le 3/4$

E_4 - קשתות נמצאות שאינן מוקפות ע״י C. — — — $w(E_4) \le 3/4$

איזשהו E_i חייב לקיים $w(E_i) \ge 1/4$ נגדיר $S = E_i$

מהי קבוצת הקדקדים שמפרידה את S ו $V \setminus S$?

אלו: קודקודים ברמה i_- פחות מ $\sqrt{n}$

אלו קודקודים ברמה i_+ פחות מ $\sqrt{n}$

אלו קודקודים של C בין רמות i_- ו i_+ פחות מ $2\sqrt{n}$

כי C מעגל בסיסי בעץ BFS.

סה״כ פחות מ $4\sqrt{n}$

לסיכום האלגוריתם, נחזור על השלבים העיקריים

- מצא מפריד מעגל בסיס (fundamental cycle separator) C
- אם C ארוך מדי, חתוך אותו ברמות BFS קטנות

המפריד המורכב קטן משום ש:

① חתכנו את C ברמת BFS קטנה

② רמות BFS קטנות לא יכולות להיות רחוקות מדי זו מזו,
הרי בכל זאת מצאנו את C מונוטוני ביחס לרמות BFS, ולכן
C אינו מטייל קשתות רבות בין הרמות בהן חתכנו.

הערה: ניתן לקבל איזון טוב יותר $(\frac{2}{3})$ ומפריד קטן יותר (עדיין $\Theta(\sqrt{n})$)

אפליקציה - שידוך מקסימלי Maximum matching

הגדרות: שידוך בגרף הוא אוסף של קשתות זרות בקדקדים

alternating path - מסלול (לא מכוון) בגרף שקשתותיו שייכות לשידוך, ולא שייכות לשידוך, לחילופין

augmenting path - alternating path שקדקדי הקצה שלו אינם משודכים.

<u>עובדה</u> - ניתן למצוא augmenting path בזמן $O(m)$ ($O(m \log n)$ אם הגרף ממושקל ורוצים מסלול שבונה את משקל מקסימלי) [Gabow 1975]

<u>עובדה</u> - יהי M שידוך מקסימלי של ת-G. אם אין augmenting path ב-G ביחס ל M, M שידוך מקסימלי של G. אם קיים מסלול כזה P, אז השידוך המתקבל משיפור M באמצעות P הוא שידוך מקסימלי.

אלגוריתם רקורסיבי:

- מצא מפריד מאוזן עם $O(\sqrt{n})$ קדקדים.
- מצא שידוך מקסימלי בכל אחד מהחלקים (ללא הקדקדים של המפריד)
- הוסף את קדקדי המפריד אחד אחרי השני ומצא augmenting path בכל צעד.

מהעובדה לעיל השידוך המתקבל בסוף התהליך הוא שידוך מקסימלי.

זמן ריצה $T(n) = T(n_1) + T(n_2) + O(n^{3/2} \log n)$

$$n_1 + n_2 \le n \quad ; \quad n_1, n_2 \le \frac{3n}{4}$$

באינדוקציה ניתן להראות ש - $T(n) = O(n^{3/2} \log n)$

Cycle Separators

נראה בהמשך שיש סיטואציות בהן חשוב שהספרטור שמשתמשים בו יהיה מעגל פשוט בגרף.

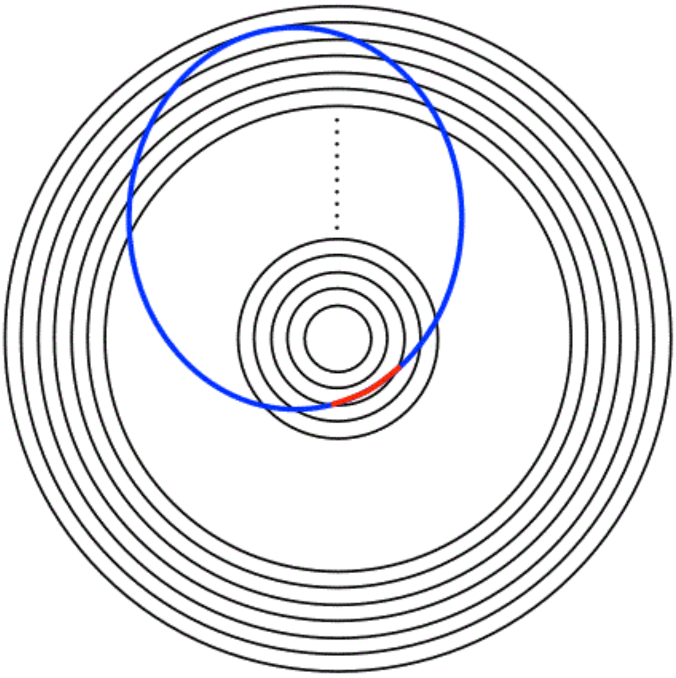
האלגוריתם שראינו יחזיר ספרטור מעגלי אם המעגל הבסיסי שמצאו כוחם לעץ ה-BFS קצר מספיק. אחרת, נוסיף לספרטור הקדקדים של רמת BFS והמבנה המעגלי לא נשמר.

כדי למצוא מפריד מעגלי, נשתמש בדואליות של חתכים ומעגלים.
הקשתות של רמת BFS משלימות מהוות חתך בגרף. בדואלי, החתך הזה מתאים לקבוצה של מעגלים פשוטים (לאו דווקא אחד, כי החתך לאו דווקא פשוט).
הרעיון הבסיסי למציאת ספרטור מעגלי קטן יהיה לעבוד עם BFS בגרף הדואלי.
צריך לעבוד קצת יותר קשה כי רוצים מעגל פשוט, אבל האינטואיציה טובה.

נשים לב שאם הגרף אינו 2-קשיר, לא קיים מפריד מעגלי (למשל - עץ)
בנוסף, אם גודל הפאות אינו חסום, לא קיים מפריד מעגלי קטן (למשל - מעגל)
לכן נניח שהקלט הוא גרף מישורי 2-קשיר שכל פאה בו היא משולש.
(בהרבה אפליקציות ניתן להוסיף קשתות מלאכותיות כדי לספק הנחה זו, בלי לשנות את הפתרון לבעיה)

הנה הספרטור שנרצה להוכיח:

<u>משפט</u> - קיים אלגוריתם עם זמן ריצה לינארי אשר, בהינתן גרף פשוט 2-קשיר שכל פאה בו היא משולש, ומשקולות על הפאות, כך שמשקל כל פאה הוא לכל היותר $\frac{3}{4}$ מהמשקל הכולל, מוצא מפריד מעגלי $\frac{3}{4}$-מאוזן עם לכל היותר $4\sqrt{n}$ קשתות. (n, כרגיל, הוא מספר הקדקדים בגרף).



הרעיון הכללי:

קשתות בין קדקודים ברמה i וברמה i+1 של ה-BFS מהוות חתך בגרף. בדואלי, קשתות אלה מהוות קבוצה של מעגלים פשוטים (לא מעגל פשוט כי החתך אינו פשוט).

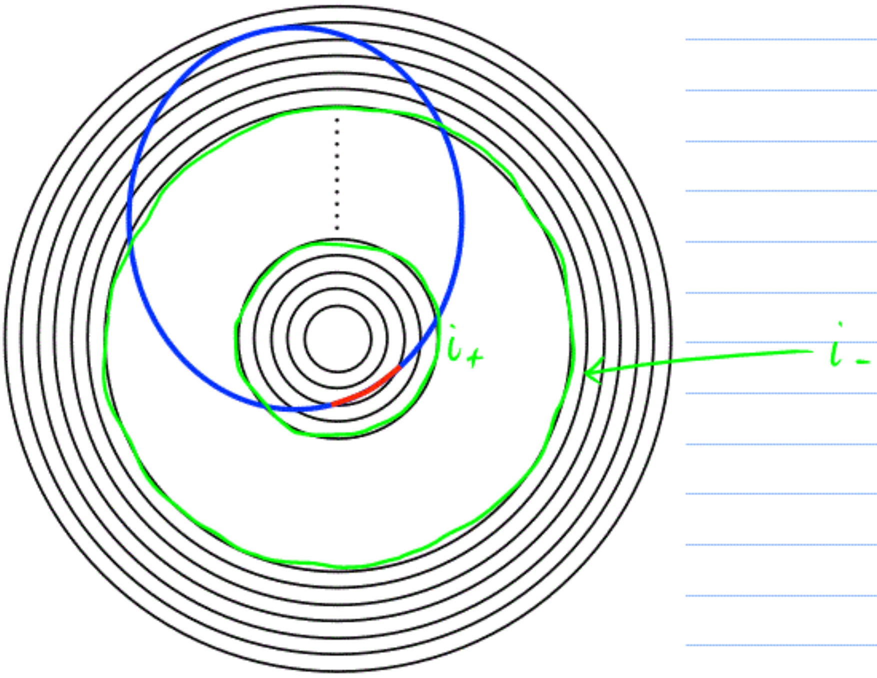
אם כך, נשתמש ב-BFS בדואלי G^*, כדי שהרמות בפרימלי G יהיו מורכבות ממעגלים. שאר האלגוריתם כמעט זהה לספרטור הקדקודים.

<u>אתגרים</u>:

- כעת צריך שהעץ T ביחס אליו מוצאים את מפריד המעגל הבסיסי יהיה מונוטוני ביחס לרמות BFS דואלי, ולא פרימלי. כלומר BFS ב-G לא יעבוד.
- איך מתמודדים עם כך שכל רמה מורכבת ממספר מעגלים, ולא ממעגל אחד.
- כשהשתמשנו ב-BFS פרימלי הרמות היו זרות בקדקודים. האם המעגלים המתקבלים מ-BFS דואלי זרים זה לזה? עלול ליצור מעגלים לא פשוטים.

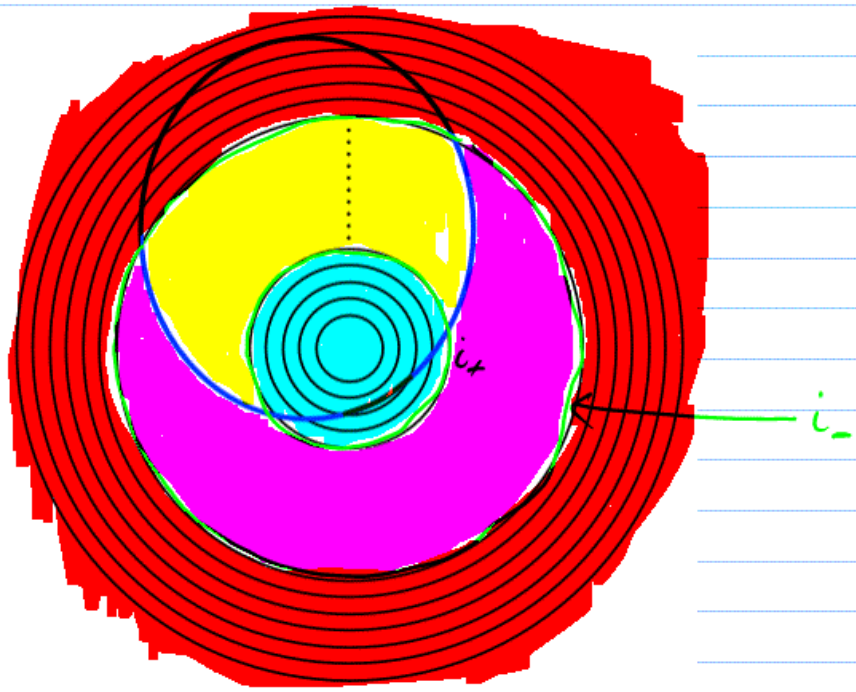
אם כל רמה היא
מעגל פשוט :

מצא רמה i_-
! i_+ כמו באלגו'
הקודם

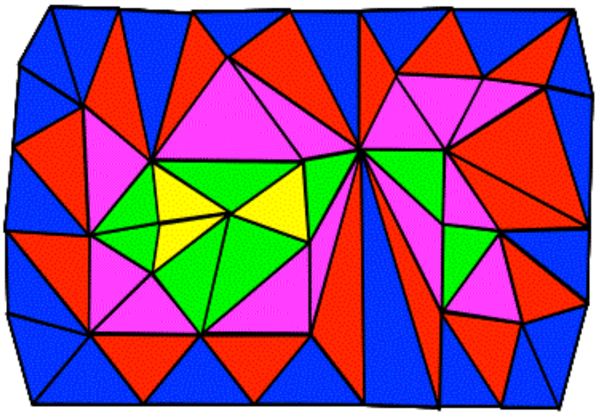


אחד מהאזורים
הצבועים חייב
להיות בעל
משקל בין $\frac{1}{4}$ ל
$\frac{3}{4}$ המשקל הכולל

הגבול של כל
אזור הוא מעגל
פשוט !

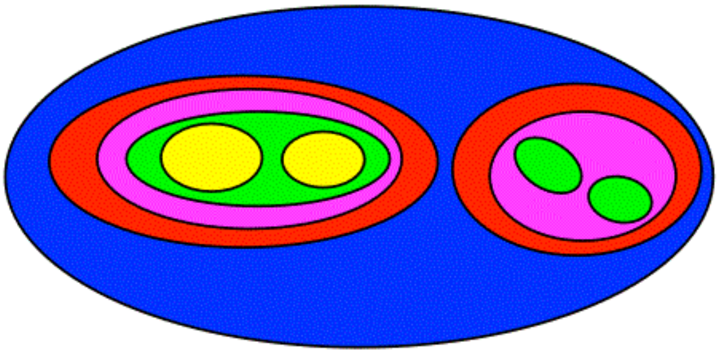


BFS ב-G^*



צביעה של הפאות של G לפי רמתן ב-BFS של G^*

הקשתות שמפרידות בין פאות ברמות עוקבות של ה-BFS הדואלי מהוות חתך ב-G^*, ולכן קבוצה של מעגלים ב-G.
המעגלים הללו זרים בקשתות, אבל לא בקדקדים.



תאור סכימטי של המעגלים ב-G שמפרידים בין פאות ברמות עוקבות של BFS ב-G^*.

המעגלים מקוננים זה בזה. ניתן לתאר את יחס הקינון באמצעות עץ שנבנה על הרכיבים הקשירים (של G^*).

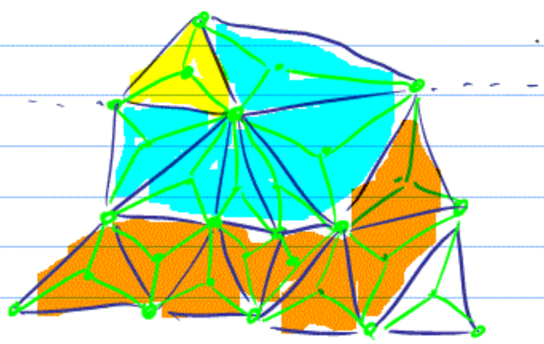
כדי לקבל מעגלים זרים בקדקדים נשתמש ב-BFS בגרף שקשור ל-G^*, אבל אינו בדיוק G^*.

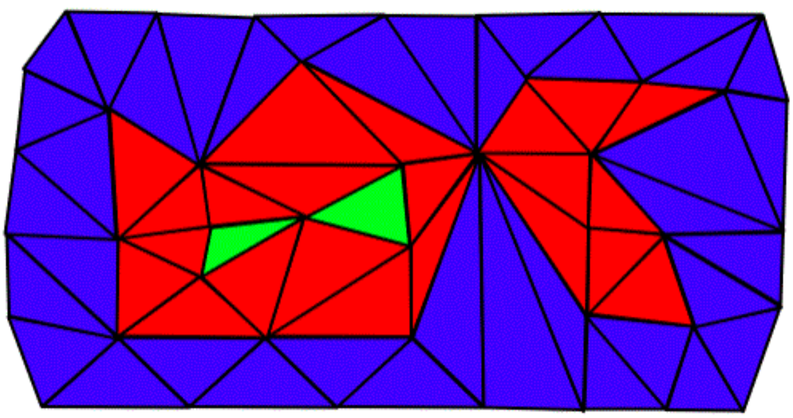
הגרף הרדיאלי (Radial / Face-Vertex incidence graph)

לגרף קשיר G, נגדיר גרף רדיאלי $FV(G)$: לכל קדקד של G יש קדקד ב-$FV(G)$. לכל פאה של G יש קדקד ב-$FV(G)$.
אם f פאה של G, ו-v קדקד ששייך לפאה f, אז הקדקדים ב-$FV(G)$ שמתאימים ל-f ול-v שכנים אחד של השני.

נגדיר רמה של פאה f להיות המספר המינימאלי של פאות של G במסלול מ-f_∞ ל-f ב-$FV(G)$, פחות 1. במילים אחרות, אם $\tilde{T}$ הוא עץ BFS של $FV(G)$ שמושרש ב-f_∞, אז הרמה $\ell(f)$ של פאה f היא מספר הפאות של G במסלול מ-f_∞ ל-f ב-$\tilde{T}$.

f_∞ היא הפאה היחידה שרמתה אפס.





כעת מעגלים בין רמות שונות זרים הן בקשתות והן בקדקדים

על הרכיבים הקשירים.

לשלב i, יהיו F_i^+ הפאות של G עם רמה לפחות i

$$F_i^+ = \{ f \in F(G) : \ell(f) \geq i \}$$

תהי K_i^+ קבוצת הרכיבים הקשירים של תת הגרף של G^* המושרה ע"י F_i^+.
ניתן לתאר את קבוצת הרכיבים הקשירים כעץ $\mathcal{T}$.
השורש של $\mathcal{T}$ הוא הרכיב היחיד ב K_0^+, כלומר G^* כולו.
הילדים של רכיב $K \in K_i^+$ הם הרכיבים של K_{i+1}^+ המוכלים ב-K.

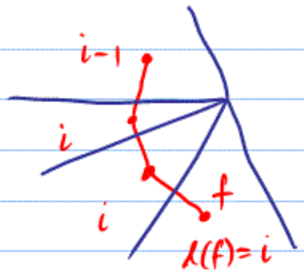
הקשתות של חתך ברמה i מפרידות ב-G^* פאות ברמה $i-1$ מפאות ברמה i.

<u>למה</u> - החתכים $\{\delta_{G^*}(K) : K \in K_i^+ \ \forall i>0\}$ זרים בקשתות

<u>הוכחה</u> - תהי fg קשת ב-$\delta_{G^*}(K)$ לרכיב קשיר כלשהו K ברמה i.
בה"כ $g \in K$, $f \notin K$. הרמה של f חייבת להיות קטנה מ-i,
ומכיוון ש f ו-g חולקות קדקד ב-G, הרמה של f היא $i-1$, ושל g היא i.
לכן, כל רכיב K' כך ש $f \in \delta_{G^*}(K')$, חייב להיות רכיב ברמה i שמכיל את g,
כלומר K. □

<u>למה</u> - לכל רכיב K ב-$\mathcal{T}$, $\delta_{G^*}(K)$ הוא חתך פשוט.

<u>הוכחה</u> - צריך להראות ש-K ו-$\bar{K} = V(G^*) \setminus K$ קשירים ב-G^*. K קשיר בהגדרה.
נראה שכל פאה $f \in \bar{K}$ חוץ מ-f_∞ מחוברת ב-$\bar{K}$ לפאה ברמה נמוכה
יותר. אינדוקציה תראה שכל פאה ב-$\bar{K}$ מחוברת ל-f_∞, כלומר $\bar{K}$ קשיר.
נניח שהרמה של f היא i.
לפאה f קדקד שסמוך לפאה ברמה $i-1$
הוכחה ב3.1:
כל הפאות על המסלול האדום אינן ב-K
כי אחרת $f \in K$.
□



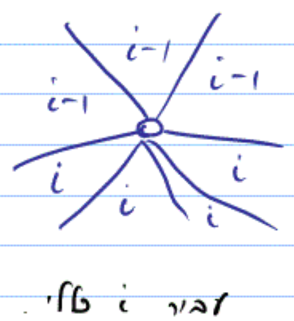
מהדואליות של חתכים פשוטים ומעגלים פשוטים נובע שהקשתות של $\delta_{G^*}(K)$ מהוות מעגל פשוט ב-G, שנסמנו $X(K)$, ושמעגלים אלו זרים בקשתות עבור K שונים.

<u>למה</u> – עבור K, K' רכיבים ברמות שונות, $X(K)$ ו-$X(K')$ זרים בקדקדים.
<u>הוכחה</u>: יהי $v \in V(G)$. כל הפאות שחלות על v הן מאותה רמה i או $i-1$ עבור i שהוא כלשהו. לכן אם e קשת שחלה על v ושייכת ל-$X(K)$ עבור רכיב K כלשהו, K חייב להיות רכיב ברמה i. □

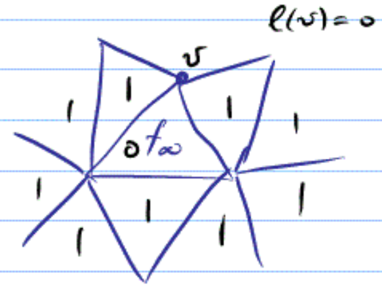
הצלחנו לקבל את מבנה הרמות שרצינו - כזה שמורכב ממעגלים מקוננים. על מנת שנוכל לחסום את מספר הקשתות במסלול בסיסי שמחבר בין שני מעגלים, אנו צריכים להגדיר עץ פורש T של G בעל תכונת מונוטוניות ביחס לרמות ה-BFS של $FV(G)$.

בדומה להגדרת הרמה של פאה, נגדיר רמה של קדקד $v \in G$ להיות אחד פחות מהמספר המינימלי של קדקדים של G במסלול מ-f_∞ ל-v ב-$FV(G)$.

כבר ראינו שעבור רכיב K ברמה i, הקשתות של $X(K)$ חלות על פאה אחת ברמה $i-1$ ופאה אחת ברמה i. מההגדרה של רמה של קדקד נובע שכל הקדקדים של $X(K)$ הם קדקדים ברמה $i-1$.



עבור i כללי.



סביב f_∞ (שרמתה אפס)

נגדיר עץ פורש T של G מתוך עץ BFS T' של $FV(G)$.
עבור קדקד v של G עם רמה $0<\ell(v)$, ההורה של v ב-T' הוא
פאה f של G, וההורה של f הוא קדקד u של G.
מכיוון שכל פאה ב-G היא משולש, uv היא קשת של הפאה f.
נגדיר כי הקשת uv היא קשת ב-T, ו-u הוא ההורה של v ב-T.
כדי להשלים ההגדרה, נבחר את אחד משלושת הקדקדים של G ברמה אפס
להיות השורש של T, ונגדיר אותו כהורה של שני הקדקדים הנותרים ברמה אפס.

כעת T הוא עץ פורש של G, ולכל קדקד v עם רמה $0<\ell(v)$,
ההורה של v ב-T הוא קדקד ברמה $\ell(v)-1$. זוהי תכונת
המונוטוניות שחפשנו.

מכאן שכל הקדקדים של $X(K)$ הם באותה רמה נוגע

1) מסלול משורש לקדקד ב-T אינו משתמש באף קשת של אף $X(k)$

<u>הוכחה</u>: כל הקשתות במסלול כזה מונוטוניות ממש ביחס לרמת קדקדים,
אבל קבועות ב-$X(k)$.

2) אם מסלול משורש לקדקד ב-T נכנס לרכיב כלשהו K (כלומר, מנצל
קשת uv כך ש $u\in X(k)$ ו-v מוקף ממש ע"י $X(K)$), אז הוא
אינו יוצא מ-K.

<u>הוכחה</u>: משום ש-v מוקף ממש ע"י $X(K)$, דרגתו גדולה מזו של הקדקדים
של $X(k)$. משום שהמסלול מונוטוני, הוא לעולם לא ישוב לקדקד של $X(k)$.

תכונות 1), 2) מבטיחות שהמעגל הבסיסי C נכנס בדיוק לרכיב אחד ברמה i לכל
אחת מהרמות (i_{max}, i_{min}). לכל אחד מהרכיבים הללו C נכנס בשני
קדקדים שונים. כלומר, המעגל שהנחנו לעיל מוצדק.