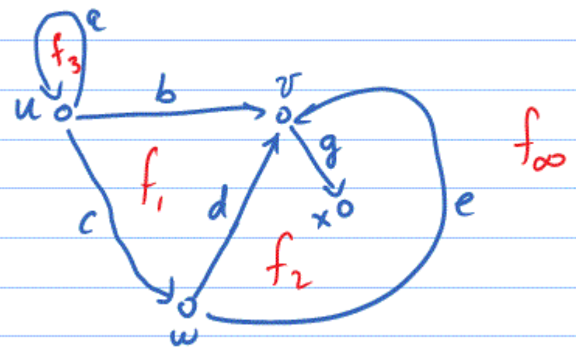
Note Title

Example



$$\pi = \Big(\overbrace{(c^-, b^-, a^-, a^+)}^{u}\overbrace{(b^+, d^+, g^-, e^+)}^{v}\overbrace{(g^+)}^{x}\overbrace{(c^+, e^-, d^-)}^{w}\Big)$$

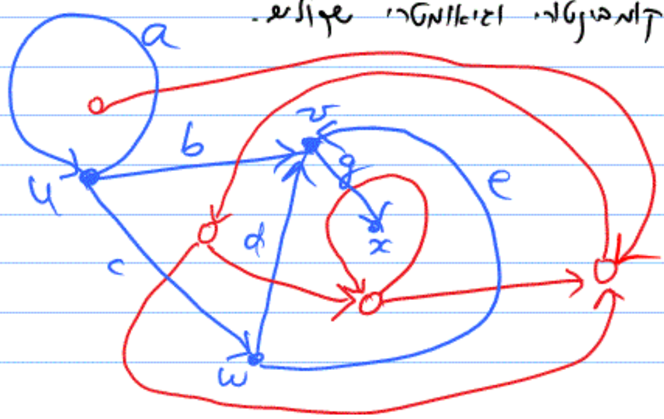
$$\pi^* = \Big(\underbrace{(c^-, b^+, d^-)}_{f_1}\underbrace{(d^+, g^+, g^-, e^-)}_{f_2}\underbrace{(a^-)}_{f_3}\underbrace{(a^+, c^+, e^+, b^-)}_{f_\infty}\Big)$$

בשיכון הגיאומטרי, כל פאה פרט ל-f_∞ מתאימה למעגל חיצים בכוון השעון.

f_∞ נקראת הפאה האינסופית, או הפאה הלא חסומה של G.

בשיכון קומבינטורי הפאה האינסופית אינה שונה משאר הפאות. (חשבו על שיכון של הגרף על פני כדור).

בשיכונים קומבינטוריים לכל רכיב קשירות יש פאה אינסופית משלו. עבור גרפים קשירים, שיכון קומבינטורי וגיאומטרי שקולים.

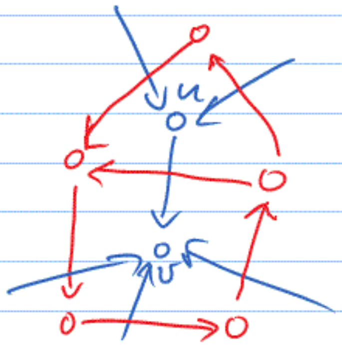


Deletions & Contractions

מחיקת הקשת a בגרף G_π יוצרת גרף $G_{\pi'}$, כאשר

$$\pi'(d) = \begin{cases} \pi \circ \pi(d') & \text{if } \pi(d') \text{ is a dart of } a \\ \pi(d') & \text{otherwise} \end{cases}$$

<u>למה</u>: כיווץ קשת ב-G_π שקול למחיקתה ב-G^*_π



אינטואיציה:

ב-G^*, u ו-v הן פאות.
מחיקת הקשת uv ב-G^* מאחדת
את הפאות הללו, כלומר מאחדת
את הקודקודים u ו-v ב-G

<u>הוכחה</u>: תהי uv הקשת המכווצת. יהיו $(a_1, a_2, \dots, a_k)$
ו-$(b_1, b_2, \dots, b_\ell)$ המחזורים של u ו-v ב-π, כך
ש-a_1 ו-b_1 הם החיצים של uv.
מכיוון ש-uv אינה לולאה, המחזורים הללו שונים.
תהי $\pi^{*'}$ התמורה המתקבלת מ-π^* ע"י מחיקת uv.

אני רוצה להראות ש-$(\pi^{*'})^*$ ו-π זהות, למעט המחזורים
של u ו-v שמתאחדים ב-$(\pi^{*'})^*$ ל-$(a_2, \dots, a_k, b_2, b_3, \dots, b_\ell)$

$$(\pi^{*'})^*(d) = rev \circ \pi^{*'}(d) = rev \circ \begin{cases} \pi^* \circ \pi^*(d) & \text{if } \pi^*(d) \text{ deleted} \\ \pi^*(d) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi^*(d) \text{ deleted if } \quad & rev(\pi(d)) \in \{a_1, b_1\} \\ \iff \quad & \pi(d) \in \{b_1, a_1\} \\ \iff \quad & d \in \{b_\ell, a_k\} \end{aligned}$$

Contractions continued

כלומר,

$$(\pi^{*'})^*(d) = rev \circ \begin{cases} \pi^* \circ \pi^*(d) & \text{if } d \in \{a_k, b_l\} \\ \pi^*(d) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} rev \circ rev \circ \pi \circ rev \circ \pi(a_k) & d = a_k \\ rev \circ rev \circ \pi \circ rev \circ \pi(b_l) & d = b_l \\ rev \circ rev \circ \pi(d) & o/w \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_l & \text{if } d = a_k \\ a_l & \text{if } d = b_l \\ d & o/w \end{cases}$$

$\square$

Excluded Minors מינורים אסורים

H הוא מינור של G אם H מתקבל מ-G ע"י: מחיקת קשתות וכיווץ קשתות.

נזכור את K_4, K_5, $K_{3,3}$ של המישוריות

משפט - גרף מישורי $\iff$ לא מכיל את K_5, $K_{3,3}$ כמינורים.

Connectivity

<u>למה</u> - החיצים של כל פאה f בגרף משוכן G_π קשירים

הוכחה: יהיו $d_1 \dots d_k$ החיצים במחזור של π^* שמתאים ל-f.

נראה כי $head(d_i) = tail(d_{i+1})$

$$d_{i+1} = \pi^*(d_i) = rev \circ \pi(d_i)$$

$$tail(d_{i+1}) = tail(rev \circ \pi(d_i)) = head(\pi(d_i)) = head(d_i)$$

לכל החיצים באותו מחזור של π
בעלי אותו ראש.

$\square$

<u>למה</u> - אם d ו-d' קשירים ב-G_π הם קשירים ב-G_π^*

הוכחה

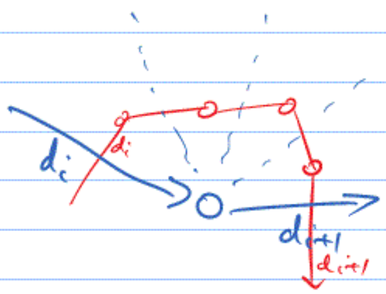
יהי $d = d_0, d_1, \dots, d_k = d'$
מסלול ב-G. כלומר $head(d_i) = tail(d_{i+1})$

$$\Longleftrightarrow$$

$$head(d_i) = head(rev \circ d_{i+1})$$

כלומר, d_i ו-$rev(d_{i+1})$ שייכים לאותו מחזור של π, כלומר לאותה פאה של π^*. לפי הלמה הקודמת, d_i ו-$rev(d_{i+1})$ קשירים ב-G_π^* ולכן גם d_i ו-d_{i+1}.

<u>תולדה</u> - קבוצת חיצים מהווה רכיב קשיר ב-G_π אם"ם היא מהווה רכיב קשיר גם ב-G_π^*



Planarity

יהי G גרף משוכן עם n קדקודים, m קשתות ו-ϕ פאות.

אופיין אוילר (Euler) של G הוא:

$$\chi(G) = n - m + \phi$$

הגנוס g של G הוא המספר השלם המקיים $\chi(G) = 2 - 2g$

נגדיר גרף מישורי כגרף משוכן עם גנוס אפס. כלומר

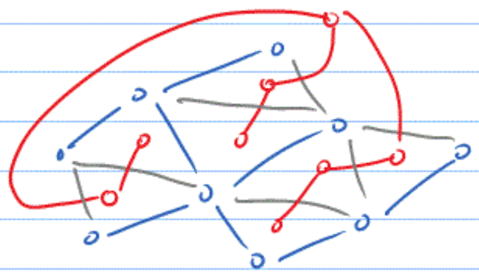
$$n - m + \phi = 2$$

הערה: הטענה שהגדרה זו שקולה לשיכון גיאומטרי דורשת הוכחה

גנוס: כדור + ידיות.

מעגלים בסיסיים ביחס ליער פורש

יהי F יער פורש. כל קשת $e \notin F$ מגדירה מעגל C_e המורכב מ-e והמסלול בין קצותיה של e ב-F.
C_e נקרא המעגל הבסיסי של e ביחס ליער F.



חתכים

החתך הלא מכוון המוגדר ע"י קבוצת קדקודים $S \subseteq V(G)$ הוא קבוצת הקשתות $\delta_G(S)$ עם קצה אחד ב-S ואחד ב-$V \setminus S$.

חתך מכוון של חיצים:
$\vec{\delta}_G(S)$ הוא קבוצת החיצים שזנבם ב-S וראשם ב-$V \setminus S$.

$\delta_G(S)$ הוא חתך פשוט (simple cut, bond) בגרף קשיר G אם גם S וגם $V \setminus S$ קשירים ב-G

תכונות מבניות של גרפים מישוריים

נרצה להוכיח תכונות מבניות בסיסיות של גרפים מישוריים שישמשו אותנו לאורך כל הקורס. הוכחה ריגורוזית תיקח זמן. נתחיל בכך שנציין התכונות.

עצים פורשים דואליים Interdigitating trees, tree/co-tree decomposition

משפט - יהי T עץ פורש של גרף מישורי G. הקשתות $E \setminus T$ מהוות עץ פורש של G^*.

"**הוכחה**": יהי C^* מעגל ב-G^*. משפט עקומת ז'ורדן קובע ש-C^* מחלק את המישור לשני אזורים קשירים. כל אחד מהאיזורים מכיל לפחות פאה אחת של G^*, כלומר קדקד אחד של G. לכן העץ T חוצה את המעגל C^*, כלומר C^* מכיל לפחות קשת אחת של T. לכן $E \setminus T$ אינן יוצרות מעגל ב-G^*, כלומר מהוות יער.

$$|E \setminus T| = |E| - |V(G)| + 1 \underset{\text{נוסחת אוילר}}{=} |V(G^*)| - 2 + 1 = |V(G^*)| - 1$$

כלומר $E - T$ מהוות עץ ב-G^*.

דואליות של חתכים ומעגלים פשוטים:

משפט - קבוצת חיצים C מהווה חתך פשוט בגרף מישורי G אמ"מ היא מהווה מעגל פשוט ב-G^*.

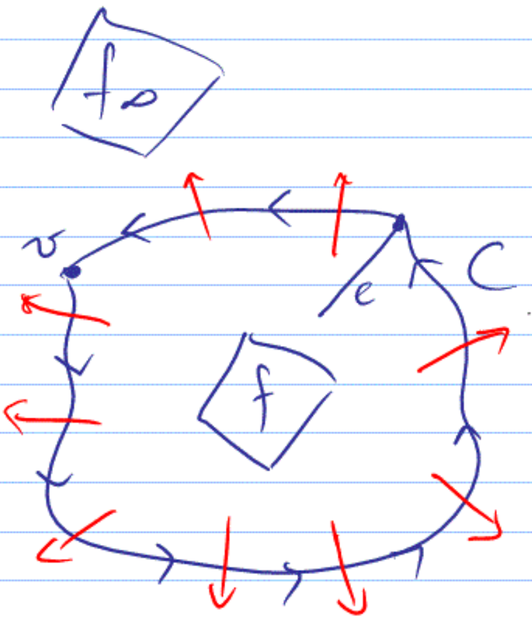
Encloses

יהי C מעגל פשוט של חיצים בגרף מישורי G.

תהי f_∞ פאה כלשהי של G.

C מקיף פאה f אם החיצים של C מהווים חתך $\delta_{G^*}(S)$ כך ש- $f \in S$ ו- $f_\infty \notin S$

C מקיף קדקד/קשת אם הוא מקיף פאה שמכילה את הקדקוד/קשת. ומקיף ממש אם C אינו עובר דרך הקדקד/קשת.



C מקיף את f

rev(C) לא מקיף את f

C מקיף את v, e

C מקיף ממש את e, אבל
לא את v.