זרימה מקסימלית עם מקורות ובורות רבים

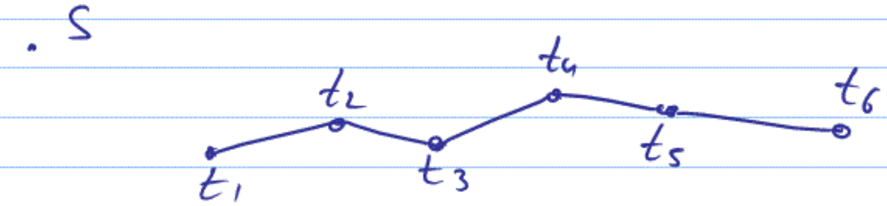
Note Title

נתון: גרף מכוון $G=(V,A)$ עם קיבולות אי-שליליות c
וקשתות. $S,T\subset V$

רוצים למצוא: זרימה f מכבדת קיבולות ומשמרת ב $V\setminus(S\cup T)$
שממקסמת את $\sum_{head(d)\in T} f(d)$

בגישה כללית הבעיה שקולה לזרימת s-t מקסימלית:
הוסף מקור s' ובור t' וחבר אותם למקורות
ולבורות עם קשתות בעלות קיבולת ∞.
הרדוקציה הזו משברת את המישוריות של הגרף, ולכן
לא ניתן להשתמש באלגוריתם $O(n\log n)$ מהשיעור הקודם.

תיאום: מקור אחד, הרבה בורות, אבל כל הבורות
על מסלול P ב-G



פתרון: שנה הקיבולות של קשתות P ל- ∞ ונמצא זרימה מקסימלית f מ- s ל- t_1.

הצמצום של f לקשתות שאינן ב- P היא זרימה מקסימלית מ- s ל- $t_1, t_2, \ldots$.

מדוע? זרימה f מקסימלית $\iff$ אין מסלולים שיפור מ- s ל- $t_1, t_2, \ldots$ ב- G_f.

נוטציה: $s \overset{G_f}{\not\longrightarrow} t_i$

בגלל ששינינו הקיבולות ל- ∞,

$$s \xrightarrow{G_f} t_1 \iff s \xrightarrow{G_f} t_j$$

דרך אחרת לפתור את הבעיה: כווץ קשתות של P. כעת יש רק בור אחד.

קודם לזרימה שמכבדת קיבולים, אבל אינה בהכרח משמרת

פסאודו-זרימה. (pseudoflow)

יתרת הזרימה בצומת (inflow) היא $\sum_{d\in v} \gamma(d)$

היתרה אפס כשהזרימה משמרת ב-v.

באיזה מובן ניתן להגדיר שפסאודוזרימה היא מקסימלית?

נגדיר V^+ (V^-) קדקודים עם יתרת זרימה חיובית (שלילית)

נאמר שפסאודו-זרימה היא מקסימלית אם $S\cup V^+ \not\xrightarrow{G_f} T\cup V^-$

הסיבה היא שניתן (ביעילות*) להפוך פסאודו-זרימה מקסימלית

לזרימה מקסימלית ע"י החזרת זרימה מ-T ל-V^-

ומ-V^+ ל-S כך שהיתרה בכל קדקוד (פרט לאלו של S, T)

היא אפס, ו- $T \not\to S$.

* ניתן לעשות זאת בזמן לינארי - בתרגול.

מדוע ההגדרה לא תובעת מסלול שיפור מ-S ל-T?

<u>למה:</u> תהי g זרימה שמקורותיה X (כלומר X הם הקדקדים שהעודף של g בהם שלילי). (למת המקורות)

יהיו A, B קבוצות קדקדים.

$$A\cup X \overset{G_g}{\not\to} B \quad \Longleftarrow \quad A\cup X \overset{G}{\not\to} B$$

<u>הוכחה:</u> מכיוון ש $A\cup X \not\to B$, קיים חתך $\vec{\delta}$ שמפריד את $A\cup X$ מ-B וקיבולתו אפס. הזרמת זרימה מ-X אינה מגדילה את הקיבולת של $\vec{\delta}$. $\square$

באופן דומה: אם g זרימה שבורותיה X, $A \overset{G}{\not\to} B\cup X$

$$\Downarrow$$

$$A \overset{G_g}{\not\to} B\cup X$$

(למת הבורות)

לכן הזרמת זרימה מ-V^+ אל V^- אינה משנה

$$S\cup V^+ \not\to T\cup V^-$$

תיקון זרימה על מעגל

נתון מעגל C עם יתרות (חיוביות או שליליות) בקדקדיו.

רוצים זרימה f מכבדת קיבולות ומשמרת בכל קדקד

פרט לאלו של C, כך שב-G_f אין מסלול שיורי מקדקד

עם יתרה חיובית לקדקד עם יתרה שלילית. (הקדקדים עם
יתרה חיובית/שלילית בסיום אינם בהכרח אלו שהיו בהתחלה)

נטפל בכל קדקד של C בנפרד בסדר צקלי באמצעות

הטכניקה שפתחנו כשכל הבורות על מסלול.

אם $v \in C$ בעל יתרה חיובית, הזרם זרימה מקסימלית בינו

לבין כל שאר קדקדי C בהם טרם טיפלנו. (לא נזרים יותר מהיתרה ב-v)

אם בעל יתרה שלילית, הזרם אליו זרימה מקסימלית מכל הקדקדים

של C בהם טרם טיפלנו. (לא נזרים יותר מהחוסר ב-v)

מלמת השמורה והבורות בסוף התהליך לא תהיה זרימה מקדקד

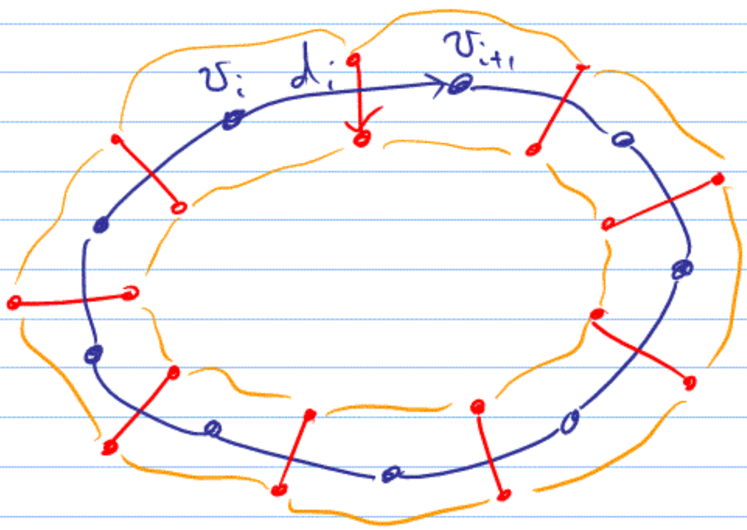
עם יתרה חיובית לקדקד עם יתרה שלילית.

יש $O(\sqrt{n})$ קדקדים, וכל אחד מטופל בזמן $O(n)$ (זרימה

המן שכנים בגרף). סה"כ $O(n^{3/2})$

כיצד לקבל זמן כמעט לינארי ?

בכל שלב של אלגוריתם תיקון המעגל משנים את הקיבולות של $O(\sqrt{n})$ קשתות של C ומחשבים זרימה בין קדקודים עוקבים של C.



זרימה בין $tail(d_i)$ ל-$head(d_i)$ מחושבת על-ידי חישוב של מרחקים קדקוד φ_i מ- $head_{G^*}(d_i)$ כשהאורכים הם הקיבולות השיוריות ביחס לזרימה שהוזרמה עד כה.

מוגדרת סירקולציה $\theta_i(d) = \varphi_i(head(d^*)) - \varphi_i(tail(d^*))$ והזרימה המשוקללת מתקבלת מ- θ_i ע"י ביטול הזרימה של θ_i על החץ d_i.

נניח הזרימה באיטרציה ה-i של האלגוריתם מורכבת

1) המרחקים φ_i (שמשרים סירקולציה θ_i)

2) זרימה משורשרת η_i על החץ d_i $\varphi(tail_{G^*}(d_i)) - \varphi(head_{G^*}(d_i))$

הזרימה הכוללת בתחילת האיטרציה ה-i מיוצגת (מלינאריות) ע"

1) $$\varphi = \sum_{j<i} \varphi_i$$

2) $$\eta = \sum_{j<i} \eta_i$$

כדי לחשב את φ_i, η_i מחשבים מרחקים קצרים ביחס

לקיבולות השיוריות של הזרימה המיוצגת ע" φ, η:

עבור חץ d שאינו שייך למפריד C הקיבולת השיורית היא:

$$c(d) + \varphi(tail_{G^*}(d)) - \varphi(head_{G^*}(d))$$

כלומר, האורך המותאם $c_\varphi(d)$.

עבור חץ d ששייך למפריד C, הקיבולת השיורית תלויה גם

ב-$\eta(d)$.

במקום לייצג את φ בכל הפאות של הגרף,
נראה שניתן לשמור את φ רק עבור הקצוות ב-G^*
של החיצים של המפריד C, ועדיין לחשב את φ_i
עבור פאות אלו, ולא $\eta(d_i)$ באופן מדויק.

תהי $V^*(C)$ קבוצת הפאות שהן קצוות ב-G^* של קשתות של C
יהי H^* הגרף המושרה מ G^* ע"י מחיקת הקשתות של C.
קדקדי $V^*(C)$ נמצאים על שתי פאות של H^*.
נחשב מראש, לפני תחילת האלגוריתם את ה-DDG על $V^*(C)$
ב-H^*.

בזמן ריצת האלגוריתם האורכים של חיצים ב-H^*
הם המצומצמים ביחס ל-φ. לכן אורכם של המסלולים
הקצרים המיוצגים ב-DDG משתנה רק בהפרש של
φ על קצותיהם, כלומר קדקדי $V^*(C)$.
ניתן לחשב את φ_i עבור $V^*(C)$ ע"י הרצת
FR-Dijkstra על ה-DDG + הקשתות של C

זמן הריצה יהיה $\sqrt{n}\log^2 n$ להרצה של FR.

יש $\sqrt{n}$ איטרציות, כך שהזמן הכולל הוא $n\log^2 n$

ובסיומו חישבנו את η ואת ערכי φ של $V^*(C)$

בסוף האיטרציה האחרונה.

הערות:

- איננו יכולים להרשות לעצמנו לעדכן את האורכים ב- DDG

לאורכים עדכניים בכל שלב של האלגוריתם (יש $O(n)$

אורכים ב- DDG ואנחנו מוכנים להשקיע רק $O(\sqrt{n})$ בכל איטרציה).

פתרון $\Rightarrow$ ניתן לחשב כל אורך עדכני ב $O(1)$ זמן

כאשר הוא נדרש ע"י FR.

- FR דורש מבנה RMQ, ויש צורך לעדכן המבנה

בכל פעם שהאורכים העדכניים משתנים.

בתרגול ראינו מבנה RMQ שזמן הבניה שלו $O(n)$

וזמן השאילתא $O(\log n)$.

קיים מבנה RMQ שמנצל את תכונת ה- Monge

של מטריצת המרחקים ב- DDG עם זמן בניה $O(\sqrt{n}\log^2 n)$
וזמן שאילתא $O(\log n)$.

- בסופו של דבר אנחנו מעוניינים בזרימה בכל G, כלומר
צריכים לדעת את φ בסוף האלגוריתם של כל הגרף, ולא
רק של $V^*(c)$.
אבל זו רק בעיה של מציאת סירקולציה שמכבדת קיבולות
בגרף מישורי. (מה שחשוב הוא שאנחנו יודעים את η - כמה
זרימה הוזרמה בין s לזוג שכנים של c).
וניתן למצוא סירקולציה ע"י חישוב מסלולים קצרים ב G^*
ב $O(n\log^2 n)$ זמן.
(למעשה ניתן לעשות זאת ב- $O(n)$ ע"י הפעלה אחת
נוספת של FR-Dijkstra ושימוש במרחקים המחושבים כאתחול
לחישוב מרחקים ב- H^* ללא ארכים שליליים).
סה"כ זמן הריצה לפרוצדורת התיקון: $O(n\log^2 n)$

זרימה עם מקורות ובורות מרובים.

נפתור בעיה קצת יותר כללית:

קלט: גרף מישורי מכוון $G=(V,A)$
עם קיבולות אי-שליליות c

קבוצת מקורות S, בורות T

קבוצה של לכל היותר 6 צמתים מיוחדים A

פלט: פסאודו-זרימה f משמרת ב- $V-(S\cup T\cup A)$
כך ש $S \overset{G_f}{\not\to} T$, $A \overset{G_f}{\not\to} T$, $S \overset{G_f}{\not\to} A$

בעית הזרימה היא המקרה הפרטי בו $A=\emptyset$.

האלגוריתם:

1 - מצא מפריד מסלולי C (הפרד לסירוגין לפי גודל הגרף ולפי גודל $|A|$).

נניח ש-C אינו מכיל צמתים של A, S, T (קל לדאוג לכך)

יהיו G_{in}, G_{out} תתי הגרפים של G המופרדים ע״י C

2 - לכל i ב- $\{out, in\}$:

3 - כווץ את C לצומת יחיד v.

4 - פתור רקורסיבית ב-G_i עם מקורות $S\cap G_i$

בורות $T\cap G_i$ וקדקדים שמורים $(A\cap G_i)\cup\{v\}$

תהי f_i הזרימה המתקבלת

5 - תהי $f=f_1+f_2$ זרימה ב-G

בעיה ל-f: $S\not\to C$, $S\not\to A$, $S\not\to T$,

$C\not\to T$, $A\not\to T$

אבל f אינה משמרת על C, $C^+\to C^-$, $A\to C$, $C\to A$

6- תקן את f באמצעות פרוצדורת התיקון על C.

כעת $C^+\not\to C^-$ אבל עדיין $A\to C$, $C\to A$

7- לכל $a \in A$:

8- הזרם יתרת זרימה מ-C^+ ל-a

9- כסה חוסר זרימה ב-C^- מ-a

כמו עם $C^+ \not\to A$ $A \not\to C^-$

10- החזר יתרת זרימה מ-C^+ וכסה חוסר זרימה אל C^-.

כעת הזרימה משמרת ב $V \setminus (S \cup T \cup A)$

$A \not\to T$ $S \not\to A$ $S \not\to T$ נשמרים

ניתן לבצע את שלב 8 ע״י זרימת st-מקסימלית

מ-C^+ ל a, והפעלת פרוצדורת התיקון אל C^+.

(יש כאן פרטים שוליים נוספים אחרים)

זמן הריצה:

$$T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + O(n \log^2 n)$$

$$= O(n \log^3 n)$$