Note Title

זרימה בגרפים מעורבים.

$G=(V,A)$ גרף מעורב.

זרימה γ ב-G היא השמה של ערכים לחיצים של G

כך ש: $\qquad \gamma(d) = -\gamma(\mathrm{rev}(d))$

כלומר γ הוא וקטור במרחב הקשתות של G.

פונקצית קיבולת ב-G היא השמה $\quad c: D \to \mathbb{R}$

כלומר, וקטור במרחב החיצים.

אנו רגילים בדרך כלל לעבוד עם קיבולות $c(a)$ לא שליליות של

הקשתות של גרף מכוון. ההרחבה לחיצים הוא:

$$c(a^+) = c(a)$$

$$c(a^-) = 0$$

זרימה γ **מכבדת את הקיבולת** c אם

$$\gamma(d) \le c(d) \quad \forall d \in D$$

כלומר $c(d)$ הוא חסם עליון לזרימה.

מה המשמעות של קיבולת שלילית:

$$\gamma(d) \leq c(d)$$

$$\iff \quad -\gamma(d) \geq -c(d)$$

$$\iff \quad \gamma(rev(d)) \geq -c(d)$$

כלומר, אם $c(d) \leq 0$ אז $|c(d)|$ הוא

חסם תחתון על הזרימה של $rev(d)$.

שימושי כשעוסקים בזרמים שיוריים.

זרימה γ נקראת משמרת בקדקד v אם

$$\sum_{d \in v} \gamma(d) = 0 \qquad \left[\, \gamma \cdot \eta(v) = 0 \,\right]$$

זרימה שמשמרת בכל קדקד נקראת סירקולציה.

כלומר, סירקולציה היא וקטור במרחב המעגלים.

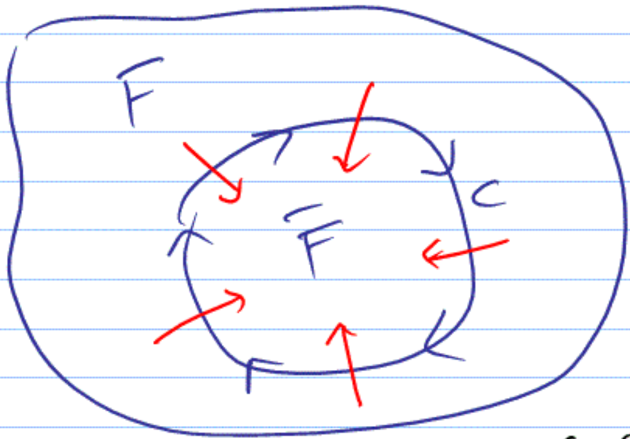
היינו יכולים להגדיר את כל התורה של סירקולציות

באופן מיידי מתכונות של מרחב המעגלים והדואליות שלו

עם מרחב החתכים של G^*. ראו בספר.

אפשר לאור בלי הפורמליזם של מרחבים וקטוריים.

כל סירקולציה ניתן לפרק לקבוצה של מעגלים פשוטים של צרימה. חשבו על מעגל C שכל אחד מהחיצים שלו נושא צרימה λ.



החיצים של C מהווים חתך פשוט $(F,\bar{F})$ ב-G^* כך ש $\vec{\delta}_{G^*}(F)=C$

תהי φ פונקצ' על הפאות של G:

$$\varphi(g)=\begin{cases} 0 & g\in F \\ \lambda & g\in \bar{F} \end{cases}$$

פונקצית מחיר

נגדיר צרימה:

$$\theta_\varphi(d)=\varphi(\mathrm{head}_{G^*}(d))-\varphi(\mathrm{tail}_{G^*}(d))$$

$$=\varphi(\text{פאה לימין } d)-\varphi(\text{פאה משמאל } d)$$

θ_φ היא בדיוק הסירקולציה שהתחלנו איתה.

מכיוון שכל סירקולציה ניתן לפרק למעגלים פשוטים של צבימה, לכל סירקולציה מתאימה פוטנציאל מחיר.
פוטנציאל המחיר יחידה תחת הקונבנציה ש $\varphi(f_\infty)=0$.

ההיפך גם נכון: לכל פוטנציאל מחיר מתאימה סירקולציה.

ההתאמה הזו בין סירקולציות ב-G לפוט' מחיר על הפאות של G אינה מקרית.
אמרנו שסירקולציה θ היא וקטור במרחב המעגלים, כלומר ניתן לפתח את θ בבסיס של מרחב החתכים של G^*:

$$\theta = \sum_{f \in F_\infty} \varphi(f) \cdot \eta(f)$$

$$\theta[d] = \sum_{f \in F_\infty} \varphi(f) \cdot \eta(f)[d] = \varphi(\mathrm{head}_{G^*}(d)) - \varphi(\mathrm{tail}_{G^*}(d))$$

עבור זרימה γ בגרף עם קיבולת c, הקיבולת השיורית היא:

$$C_\gamma(d) = c(d) - \gamma(d)$$

הגרף השיורי G_γ הוא G עם קיבולות C_γ

עבור סירקולציה θ, שפונק' המחיר שלה הוא φ,
הקיבולת השיורית היא:

$$\begin{aligned} C_\theta(d) &= c(d) - \theta(d) \\ &= c(d^*) - \left(\varphi(\mathrm{head}(d^*)) - \varphi(\mathrm{tail}(d^*))\right) \\ &= c(d^*) + \varphi(\mathrm{tail}(d^*)) - \varphi(\mathrm{head}(d^*)) \\ &= c_\varphi(d^*) \end{aligned}$$

כלומר, הקיבולת השיורית של d ביחס לסירקולציה θ
היא העלות של d ביחס לפונק' המחיר φ.

אם φ משרה מתחים אי-שליליים אז

$$0 \leq c_\varphi(d^*) = C_\theta(d) = c(d) - \theta(d)$$

כלומר $\theta(d) \leq c(d)$ או במילים: θ מכבדת
את הקיבולת c אם ורק אם φ משרה מתחים אי-שליליים.

מכאן שקיימת סירקולציה שמכבדת את הקיבולות C
אם ורק אם אין מעגלים באורך שלילי ב G^*
(האורך של חץ ב- G^* הוא הקיבולת שלו $C[d]$ ב- G).

זו בעצם הבעיה הראשונה שנטפל בה -
מצאו סירקולציה שמכבדת קיבולות נתונות C.

כיצד: חשב מרחקים קצרים φ ב- G^* מקדקד
כלשהו (פאה של G). הסירקולציה θ_φ
מכבדת את הקיבולות.

זרימת s-t

בהינתן מקור s ובור t, זרימת s-t היא
זרימה ש:

① מכבדת קיבולים

② משמרת בכל קדקד פרט ל-s, t.

בעיית הזרימה האופטימלית היא למצוא זרימה s, t
f בעלת ערך $|f| = \sum_{d \in t} f[d]$ מקסימלי.

אבחנה: אם f, f' שני זרימות s-t, אז
$f'-f$ הוא סירקולציה

נניח שידוע שערך הזרימה המקסימלית הוא r. איך
מוצאים הזרימה?

תהי f זרימת s-t כלשהי שערכה r, לאו דווקא
כזו שמכבדת קיבולות. (למשל, מזרימה r על כל
מסלול כלשהו בין s ל-t).

אם γ אינה מכבדת קיבולות, אז בגרף השיורי G_γ

יהיו חיצים עם קיבולת שלילית.

נמצא סירקולציה θ שמכבדת את הקיבולות C_γ ע"י חישוב

מרחקים קצרים ב G^*_γ.

$$\theta[d] \le C_\gamma[d] = c[d] - \gamma[d]$$

$$\Rightarrow \quad \theta[d] + \gamma[d] \le c[d]$$

כלומר $\theta+\gamma$ היא זרימת s-t בגודל ערך

λ שמכבדת את הקיבולות c.

ואם לא יודעים את λ?

חיפוש בינארי (ל-λ עד שנמצא מעגל שלילי ב G^*_γ)

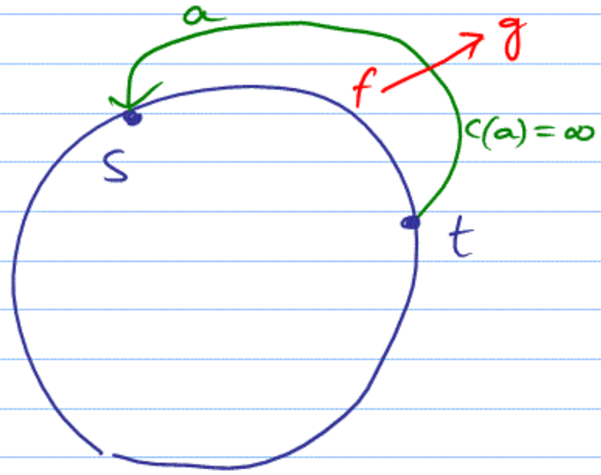
זמן ריצה: $O(n\log^2 n \cdot \log C)$

סכום הקיבולות בגרף.

זהו זמן ריצה פולינומיאלי חלש (תלוי בקלט עצמו, ולא

רק בגודל הקלט).

זרימה s-t מקסימלית כאשר s, t על אותה פאה



1) הוסף קשת a מ-t ל-s.

הקיבולת של a $c(a)=\infty$.

2) חשב φ: מרחקים קצרים מ- $tail_{G^*}(a)$ ב- G^*

3) החזר את g: הצמצום של θ_φ לקשתות המקוריות של G.

θ_φ היא סירקולציה ב $G \cup \{a\}$. לכן g היא זרימה s-t ב- G.

נותר להראות מקסימליות.

נסמן: $f = tail_{G^*}(a)$; $g = head_{G^*}(a)$

מכיוון ש $c(a) = \infty$, מספיק להראות ש- θ_φ ממקסמת את הזרימה על a מבין כל הסירקולציות שמכבדות את הקיבוליות c.

מכיוון ש $\theta_\varphi(a) = \varphi(g) - \varphi(f)$, מספיק להראות שלכל פוטנציאל מחיר φ' המקיימת

$c_{\varphi'} \geq 0$ ($\theta_{\varphi'}$ מכבדת הקיבוליות c)

מתקיים:

$$\underbrace{\varphi(g) - \varphi(f)}_{=0} \geq \varphi'(g) - \varphi'(f)$$

<u>הוכחה</u>:

יהי P המסלול ל-g בעץ המרחקים הקצרים.

$P = \underset{=f}{v_0}, v_1, \ldots, \underset{=g}{v_k}$. לכל חץ $v_{i-1}v_i$ מתקיים

$$0 \leq c_{\varphi'} = c(v_{i-1}v_i) + \varphi'(v_{i-1}) - \varphi'(v_i)$$

כלומר

$$\varphi'(v_i) \leq c(v_{i-1}v_i) + \varphi'(v_{i-1})$$

לכן:

$$\varphi'(g) = \varphi'(v_k) \le c(v_k v_{k-1}) + \varphi'(v_{k-1}) \le \dots$$
$$\le \sum_{i=1}^{k} c(v_i v_{i-1}) + \varphi'(v_0)$$

כלומר

$$\varphi'(g) - \varphi'(f) \le \sum_{d \in P} c(d) = \varphi(g)$$

$\square$

שימו לב שההוכחה עובדת לכל חתך שבנינו ב-G^*
הוא השורש f של עץ המרחקים הקצרים שמייצגת φ.
כלומר θ_φ היא הסירקולציה שמאפסת
(סימולטנית) את הזרימה על כל החיצים הללו.
חיצים אלו הם ה rev של החיצים של העץ f.