Branch Decomposition & Baker's technique

אנו עוברים לדבר על קירובים לבעיות NP קשות.

היום נלמד טכניקה כללית לאלגוריתמי קירוב בגרפים מישוריים שמבוססת על פירוק הגרף המקורי לתתי-גרפים שעליהם "קל" לפתור את הבעיה, ומהפתרונות האופטימליים לתתי-הגרפים ניתן להרכיב פתרון מקורב לבעיה המקורית.

נעבוד על Vertex Cover כדוגמה לאורך ההרצאה, הטכניקה עובדת לבעיות רבות אחרות (..., dominating set, independent set)

ויכולה לעבוד גם בבעיות ממושקלות.

נתחיל בבעיה קלה: VC של עץ.

ניתן לפתור באמצעות תכנון דינאמי:

עבור כל קדקד של העץ T מהעלים לכיוון השורש נשמור שני גדלים:

X_v - עלות הפתרון האופטימלי בתת העץ של v

Y_v - עלות הפתרון האופטימלי בתת העץ של v, כש-v חייב להיות בפתרון.

עבור עלה v, $x_v = 0$, $y_v = 1$

עבור קדקד פנימי v עם ילדים $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$y_v = 1 + \sum_i x_{v_i}$$
$$x_v = \min \{ y_v, \sum_i y_{v_i}$$

גודל VC מינימלי לעץ T ששורשו r הוא פשוט x_r.

מה ניתן לעשות כשהגרף אינו עץ?

בנוסף לעצים השתמשנו בפתרון לתת גרפים (תת-עצים) קטנים כדי לקבל פתרון לתת-עץ גדול יותר. הסיבה שקל לעשות זאת היא שהאינטראקציה בין תת עצים מוגבלת מאוד - כל תת עץ מתחבר לשאר העץ באמצעות קשת אחת שמחוברת לשורש של תת העץ.

ננסה לפרק גרף שאינו עץ לתתי-גרפים הולכים וקטנים, שהאינטראקציה ביניהם מוגבלת.

ניתן לעבוד עם תת גרפים המושרים על ידי:

קבוצות של קדקדים $\Leftarrow$ carving decomposition

או קבוצות של קשתות $\Leftarrow$ branch decomposition

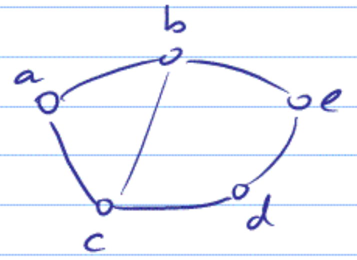
נתחיל עם תתי גרפים מושרי קדקודים. Carving Decomposition

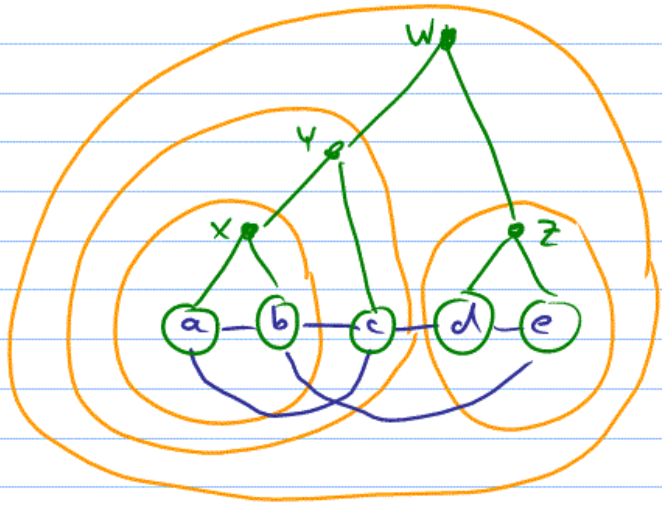
יהי $G=(V,E)$ גרף.

יהי T עץ בינארי שעליו הם הקדקודים של G

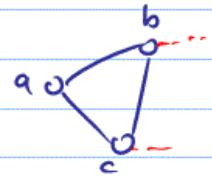
כל צומת $t\in T$ מתאים לתת גרף של G המושרה ע״י העלים

בתת העץ T_t של T המושרש ב-t.





למשל - תת הגרף שמתאים ל-T_Y הוא $G_Y =$



מהי האינטראקציה של G_Y עם $G\setminus G_Y$?

הקשתות בחתך $\delta_G(Y)=\delta_G(\{a,b,c\})$.

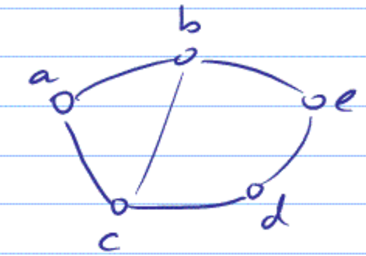
הרוחב של T הוא $\max_{X\in T}|\delta_G(X)|$

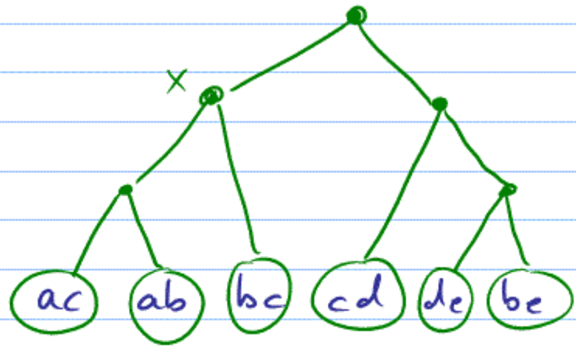
ה- carvingwidth של G הוא הרוחב המינימלי של carving decomp. של G.

אבחנה: carvingwidth $\geq$ max degree

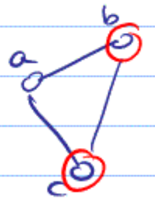
כזכור - Branch decomposition - חלוקה לחתכי גרפים מושרי קשתות

ההבדל הוא שהעלים של העץ הבינארי T הם כעת הקשתות של G.





תת הגרף שמתאים ל- T_x הוא

$G_x =$ 

מה האינטראקציה של G_x עם שאר הגרף?

$\partial_G(x)$ - הקדקודים של G_x שחלה עליהם קשת שאינה ב- G_x

הרוחב של T הוא $\max_{x \in T} \partial_G(x)$.

ה. branchwidth של G הוא הרוחב המינימלי של branch decomp. של G.

דוגמה: תיאור VC באמצעות DP על branch-decomposition,

לכל $X \in T$, לכל $S \subseteq \partial_G(X)$,

$M_X[S] =$ גודל VC מינימלי של $G(X)$ שמשתמש ב-S ולא משתמש ב-$\partial_G(X) \setminus S$.

עבור צלע בודדה - טריוויאלי. אם W אבא של X, Y

$$M_W[S] = \min_{S_X, S_Y} M_X[S_X] + M_Y[S_Y] - |S_X \cap S_Y|$$

where: $S_X \subseteq \partial_G(X),\ S_Y \subseteq \partial_G(Y) \quad (S_X \cup S_Y) \cap \partial_G(W) = S$

מה זמן הריצה?

לבנות את $X \cup Y$ מתוך X, Y לוקח $|\partial_G(X)| \cdot |\partial_G(Y)| = O(2^{bw} \cdot 2^{bw})$

כמה צמתים יש ב-T? $O(n)$

$\Leftarrow$ זמן ריצה $O(4^{bw} \cdot n)$

ליניארי אם branchwidth קבוע!

הגדרה מתמטית :

S - קבוצה של אלמנטים (ground set)

משפחה C של תת קבוצות של S נקראת laminar / non-crossing

אם לכל $c_1, c_2 \in C$, $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ או $c_1 \subseteq c_2$ או $c_2 \subseteq c_1$.

Carving של S הוא משפחה non-crossing מקסימלית

(כלומר, לא ניתן להוסיף אף תת-קבוצה נוספת).

Carving $\iff$ עץ קוביק שעליו הם האלמנטים של S.

carving decomp. זה Carving של V

branch decomp זה Carving של E

(יש פרמטר נוסף שנקרא treewidth שבמובן מסוים מכמת עד כמה G דומה לעץ. $bw-1 \le tw \le \frac{3bw}{2}$
אבל לא נגדיר treewidth בצורה מפורשת)

בגרפים כלליים חישוב branchwidth הוא NP-complete

(אם ידוע ש $bw=k$ אז ניתן למצוא branch decomp. בזמן $n \cdot 2^{O(\mathrm{poly}\, k)}$)

בגרפים מישוריים ניתן לחשב bw במדויק (לא treewidth).

- מחיקת קשתות וקדקודים אינה מגדילה Carving width
- מחיקה או כיווץ של קשתות אינה מגדילה branchwidth

קיימים גרפים מישוריים (למשל grid) עם $bw=\Theta(\sqrt{n})$

וברור שקיימים גרפים מישוריים עם carvingwidth $\Theta(n)$.

אז איך יש טיעוני שהמושגים הללו יעזרו לנו ?

נראה שיש קשר בין carving width, branchwidth של G

לרדיוס של G ושל G^*. אחר נפרק את G לתת גרפים

עם רדיוס קטן ונוכל לחשב קירובים באופן יעיל.

<u>למה</u> - יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי מדרגה לכל היותר Δ.

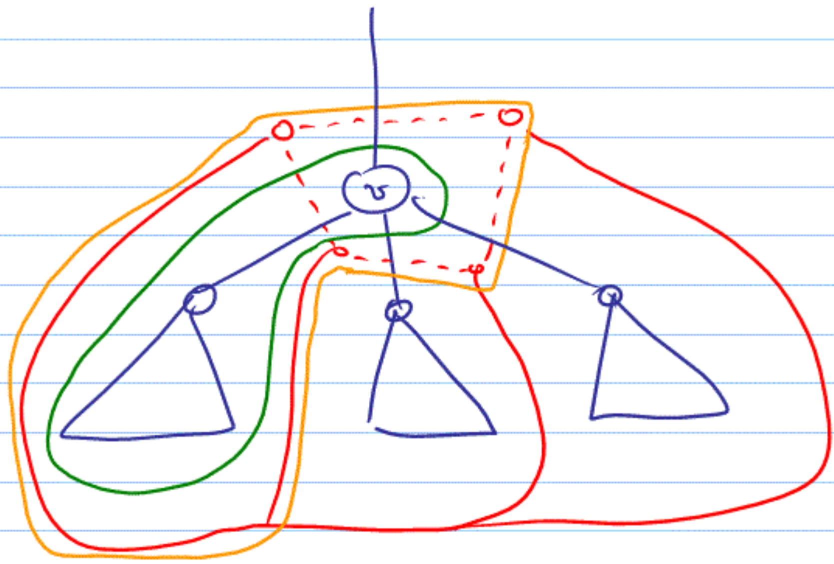
יהי T^* עץ פורש של G^* בעומק k. אזי ל-G יש

carving width לכל היותר $2k+\Delta-1$.

<u>הוכחה</u>: יהי T עץ פורש של G שמורכב מהקשתות שאינן ב-T^*.
בחר שורש r ל-T. תהי $C(v)$ קבוצת הצאצאים של v ב-T.
$C(r)=V$, כלומר $\delta_G(C(r))=\emptyset$.
עבור קדקד $v\neq r$, $\delta_G(C(v))$ הוא החתך הבסיסי של הקשת e
שנכנסת ל-v מההורה של v ביחס ל-T, כלומר דואלי למעגל הבסיסי
של e ביחס ל-T^*. לכן $|\delta_G(C(v))|\leq 2k+1$.
הבעיה היא ש-$\{C(v)\}_{v\in V}$ אינו carving decomp. כי אינו
משפחה <u>מקסימלית</u> של תת קבוצות לא חוצות של V. נתקן זאת.
יהיו $v_1,\dots,v_{\Delta-1}$ הילדים של v, ונגדיר

$$C_i(v)=\{v\}\cup\bigcup_{j=1}^{i}C(v_i)$$

קל לראות שהאיחוד של כל ה-$C_i(v)$ (לכל v ולכל i) הוא
carving decomp. של G, ולפי הצגה בעמוד הבא, רוחבו $2k+\Delta-1$
$\square$



חלק מ-T בכחול   חלק מ-T^* באדום

הקדקודים של $C_1(v)$ מוקפים בירוק

הצלעות של $\delta_G(C_1(v))$ בכתום. יש לכל היותר $\Delta-1$ קשתות
כאלו שאינן ב-T

ולכל היותר 2k קשתות כאלו ב-T.

התלות בדרגה מפריעה, ולא קיימת ב branch decomp.

<u>Gu</u> - [Tamaki]

קיים אלגוריתם לינארי שבהינתן גרף מישורי G, מחזיר branch decomp.

שרוחבו לכל היותר $3+2\min\{$ רדיוס של G, רדיוס של G^* $\}$.

ההוכחה מאוחרת יותר. ראשית נראה איך משתמשים במשפט

סכימת הקירוב של Baker

בפרק השיעור הזה עובדים על בעיות בעלות התכונה הבאה

תכונת החלוקה: אם S פתרון לבעיה בגרף G, אז ההגבלה של S לתת גרף H של G היא פתרון לבעיה בגרף H.

תכונת החלוקה תאפשר לנו לחסום את שיעור הקירוב.

דוגמה לבעיות שמקיימות את תכונת החלוקה: Vertex cover, indep. set

דוגמה לבעיות שלא מקיימות את תכונת החלוקה: dominating set, TSP

לכל בעיה נתאים חלוקה של הגרף שמקיימת את התכונה הבאה:

תכונת ההרכבה – אם H_i תתי גרפים (לאו דווקא זרים) של G ! S_i פתרון לבעיה על H_i, אז $\cup S_i$ פתרון לבעיה ב- G.

למשל, ל Vertex Cover, כל חלוקה לתתי גרפים כך ש $\cup H_i = G$

ל- independent set דרוש שלא יהיו שני חלקים H_i, H_j עם קשר ביניהם ב- G.

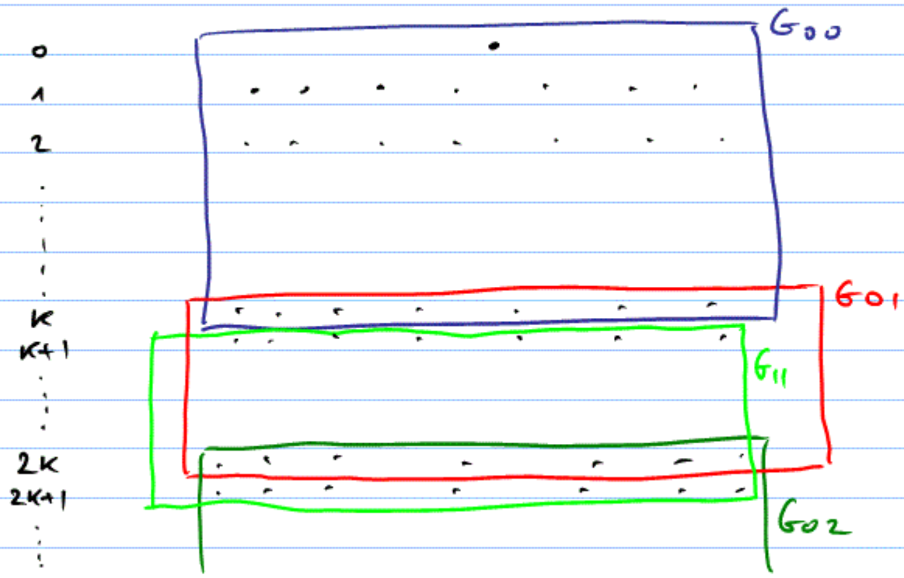
הטכניקה של Baker מחלקת את G לתת-גרפים לפי רמות BFS.

הנה האלגוריתם לקבלת $(1+\varepsilon)$ קירוב ל- min vertex cover:

- חשב רמות BFS של G.
- יהי $k=\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- עבור $i=0,1,\dots,k-1$ ו- $j=-1,0,1,2,\dots$
- יהי G_{ij} תת הגרף המושרה על קדקדים ברמות $jk+i,\dots,(j+1)k+i$

← לפי Tamaki $bw(G_{ij})=k$, לכל i, $\{G_{ij}\}_j$ מקיימים את תכונת ההרכבה

- יהי S_{ij} VC מינימלי ב- G_{ij} (מחושב ע"י DP)
- יהי $S_i=\bigcup_j S_{ij}$ מתכונת ההרכבה, S_i הוא VC של G.
- החזר את ה- S_i בגודל מינימלי.



זמן ריצה: זמן הבקבוק הוא ה-DP שלוקח $4^{O(k)}|V(G_{ij})|$

בסה"כ לכל i,j:
$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j}4^{O(k)}|V(G_{ij})| = k\cdot 4^{O(k)}\cdot n$$

כלומר, עבור ε קבוע, זמן הריצה הוא $O(n)$.

נכונות: מתכונת ההרכבה, הפלט הוא VC של G.

טיב הקירוב: יהי OPT VC מינימלי של G

תהי: OPT_i קבוצת הקדקודים של OPT ברמות $i \bmod k$.

OPT_i זרים בזוגות ואיחודם הוא OPT. לכן, קיים q

עבורו $|OPT_q| \le \frac{1}{k}|OPT| = \varepsilon|OPT|$

נתבונן ב-S_q. לכל j, S_{qj} הוא VC מינימלי ב-G_{qj}

מתכונת החלוקה, $OPT \cap V(G_{qj})$ הוא VC של G_{qj}.

מכאן ש $|S_{qj}| \le |OPT \cap V(G_{qj})|$. לכן:

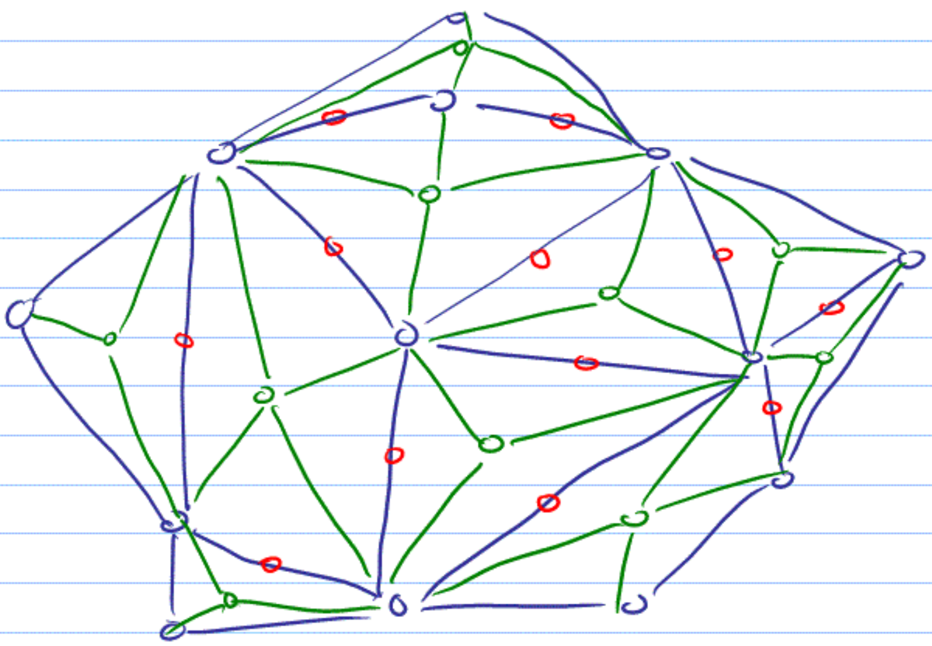
$$|S_q| = \sum_j |S_{qj}| \le \sum_j |OPT \cap V(G_{qj})|$$

כל קדקד של OPT מופיע בסכום פעם אחת, פרט לקדקודים של OPT ברמות $q \bmod k$ שמופיעים פעמיים.
$$= |OPT| + |OPT_q| \le (1+\varepsilon)|OPT|$$

הוכחה של המשפט של Tamaki.

יהי $R(G)$ הגרף הרדיאלי (face-vertex incidence graph)
של G (תזכורת: השתמשנו בגרף זה כשלמדנו על ספרטורים
מעגליים. לכל קדקד ולכל פאה של G יש צומת ב- $R(G)$.
וצלע fv ב- $R(G)$ אם הקדקד v שייך לפאה f ב- G).

השתכנענו בשעור שאם G מישורי אז $R(G)$ גם מישורי.
כל פאה ב- $R(G)$ היא מדרגה 4.



הגרף המדיאלי $M(G)$ הוא הדואלי של $R(G)$
יש התאמה 1-1 $g(\cdot)$ בין קשתות של G וקדקודים של $M(G)$.

מכיוון ש- M(G) גרף מישורי מדרגה 4, יש לו carving decomp.

C ברוחב $2r+4-1=2r+3$, כאשר r הוא הרדיוס של M(G).

נשתמש בהתאמה החח"ע g כדי להגדיר

$$C' = \{ g^{-1}(X) : X \in C \}$$

מכיוון ש C היא carving של הקדקודים של M(G),

C' היא carving של הקשתות של G, כלומר branch decomp. של G.

מהו הרוחב של C'?

תהי X קבוצה ב- C'. מהו $\partial_G(X)$?

יהי $Y=g(X)$, ויהי $v\in\partial_G(X)$. כלומר ל- v יש קשת

ב- X וקשת שאינה ב- X. יהי $(d_0, d_1, \dots, d_k)$ המחזור שמתאים

ל- v. ותהי $d_i, \dots, d_j$ תת סדרה מקסימלית של חיצים

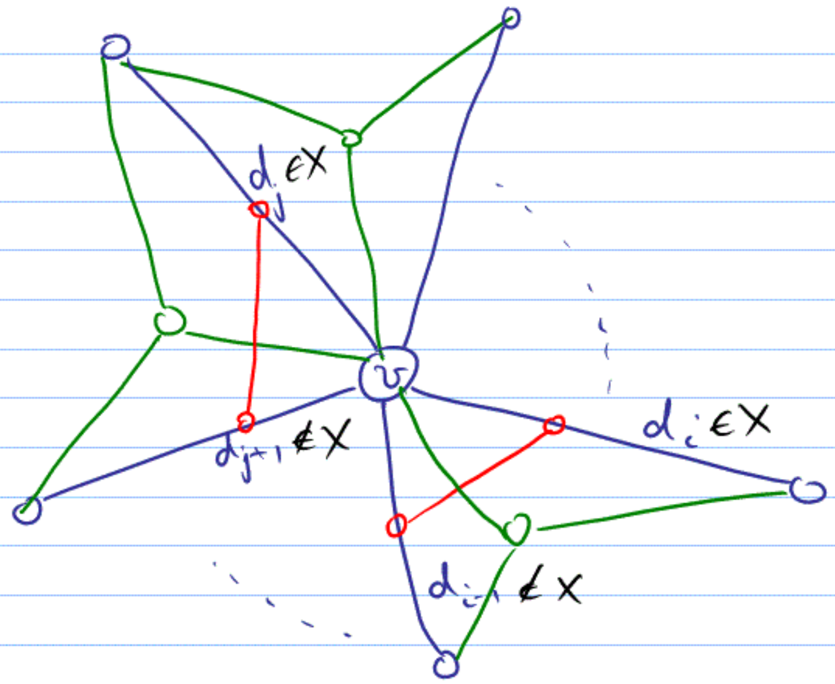
ששייכים לקשתות ב- X. כלומר d_{i-1}, d_{j+1} אינם ב- X

(ייתכן $d_{i-1}=d_{j+1}$, חיבור וחיסור mod k).

הקדקודים של M(G) שמתאימים לקשתות של b_j ו- b_{j+1} מקיימים

$g(d_j)\in Y$, $g(d_{j+1})\notin Y$. כלומר הצלע של M(G) שקצוותיה

הם $g(d_j)$ ו- $g(d_{j+1})$ שייכת ל- $\delta_{M(G)}(Y)$.



נשייך את הקשת הזו ל- v , ונשים לב שב- $R(G)$ הקשת הזו חלה על v , כלומר לא ייתכן שנשייך את הקשת הזו לקדקד אחר של G.

אותו טיעון תקף לקשת שקצותיה $g(d_i)$ ו $g(d_{i+1})$. נשייך גם אותה ל- v.

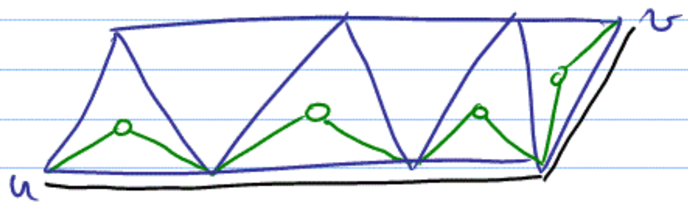
בסה"כ שייכנו ל- v לפחות שתי קשתות של $\delta_{M(G)}(Y)$

$$|\partial_G(X)| = \sum_{v\in\partial_G(X)} 1 = \frac{1}{2}\sum_{v\in\partial_G(X)} 2 \le \frac{1}{2}\sum_{v\in\partial_G(X)} \text{מספר הקשתות של } \delta_{M(G)}(Y) \text{ שמשיקות ל-} v$$

$$\le \frac{1}{2}\left|\delta_{M(G)}(Y)\right| = \frac{1}{2}(2r+3)$$

כלומר, ה-width של C' הוא לכל היותר $r+1$.

r הוא הרדיוס של $R(G)$.



לכל מסלול ב-G או ב-G^* עם x קשתות מתאים מסלול ב-$R(G)$ עם לכל היותר $2x$ קשתות. $\Leftarrow$

$$r \le 2 + 2\min\left\{\begin{array}{l}\text{רדיוס של } G,\\ \text{רדיוס של } G^*\end{array}\right.$$

כלומר $width(C')$ הוא לכל היותר $3 + 2\min\left\{\begin{array}{l}\text{רדיוס של } G\\ \text{רדיוס של } G^*\end{array}\right.$

$\square$